SAVOIRS

Thème 1 - Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

[S1.1] Familles quelconques de vecteurs

Soient E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel (que l'on note parfois **ev**), I un ensemble non vide quelconque et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

- **Famille génératrice**
  - On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ tout vecteur de la forme $x = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j$ où J est une partie finie de I et λ_j est un scalaire.

    L'ensemble de ces combinaisons linéaires est noté $\operatorname{Vect}((x_i)_{i\in I})$, c'est un sous-espace vectoriel (que l'on note parfois **sev**) de E.
  - On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une *famille génératrice* de E si $\operatorname{Vect}((x_i)_{i\in I}) = E$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ \exists J \subset I\ (J \text{ finie}),\ \exists (\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbf{K}^J \quad \text{tel que } x = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j.$$

- **Famille libre**
  - On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une *famille libre* de E si pour tout sous-ensemble fini J de I, la famille finie $(x_j)_{j\in J}$ est libre, c'est-à-dire :

$$\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0 \implies \forall j \in J,\ \lambda_j = 0.$$

    Une famille est dite *liée* si elle n'est pas libre.

    ✓ Si une famille est liée, alors l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres vecteurs.

- **Base**
  - On dit qu'une famille de vecteurs de E est une *base* de E si elle est libre et génératrice de E.
  - La famille des polynômes $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que, pour tout entier naturel k, $\deg(P_k) = k$ est une base de $\mathbf{K}[X]$. On dit que la famille $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est *échelonnée en degré*.

    En particulier, la famille $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$.

    ✓ Si E est de dimension finie n et $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ **une famille de n vecteurs** de E, alors :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est libre} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E.$$

[S1.2] Somme de sous-espaces vectoriels

- On note $\sum_{i=1}^{p} E_i$ l'ensemble $\{\, x_1 + \cdots + x_p \mid (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \,\}$; $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est appelé *somme* des sous-espaces vectoriels E_i.

  L'ensemble $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{F}_i$ est une famille génératrice de E_i, alors $\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{F}_i$ est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{p} E_i$.

- La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est une *somme directe* si :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} E_i,\ \exists!(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i.$$

  La somme directe est notée : $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

  ✓ Une somme est directe si, et seulement si, la seule décomposition de 0_E dans la somme directe est $0_E = \sum_{i=1}^{p} 0_{E_i}$.

- On appelle *base adaptée* à une somme directe $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ de sous-espaces vectoriels, toute base de la somme directe de la forme $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ où $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

  ✓ Si tous les E_i sont de dimensions finies, alors :

$$\dim(E_1 \oplus \cdots \oplus E_p) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_p).$$

- Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits *supplémentaires* si, et seulement si, E est la somme directe de F et G, soit $E = F \oplus G$.

  ✓ $E = F \oplus G \iff E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

[S1.3] Applications linéaires

- **Définitions**

  – Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite *linéaire* si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

L'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F est un **K**-espace vectoriel ; il est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

– Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle :
  * *noyau* de f, le sous-espace vectoriel de E :

$$\operatorname{Ker}(f) = \{\, x \in E \mid f(x) = 0 \,\},$$

  * *image* de f, le sous-espace vectoriel de F :

$$\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{\, y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x) \,\}.$$

✓ Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left((f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)$.

– Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im}(f) = F$.

– Soit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
  - (i) f est injective ;
  - (ii) $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$;
  - (iii) $\forall x \in E,\ f(x) = 0 \implies x = 0$.

– On dit que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est :
  * une *forme linéaire* si $F = \mathbf{K}$,
  * un *endomorphisme* si $E = F$,
  * un *isomorphisme* si f est bijective,
  * un *automorphisme* si f est bijective et $E = F$.

- **Théorème du rang**
  Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E **de dimension finie** vers un espace vectoriel F, on a :

$$\dim E = \operatorname{rg} f + \dim(\operatorname{Ker} f).$$

✓ Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel E **de dimension finie** n vers un espace vectoriel F de **même dimension**, alors :

$$f \text{ est bijectif} \iff f \text{ est injectif} \iff f \text{ est surjectif} \iff \dim(\operatorname{Ker} f) = 0 \iff \operatorname{rg} f = n.$$

- **Hyperplans**

  – Un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire, autrement dit :

$$\mathcal{H} \text{ est un hyperplan} \iff \exists\, e \in E,\ E = \mathcal{H} \oplus \mathbf{K}e.$$

✓ Si E est de dimension finie n, les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$.

– $\mathcal{H}$ est un hyperplan si, et seulement si, $\mathcal{H}$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

– Si l'on note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un vecteur x de E relatives à une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, un ensemble $\mathcal{H}$ est un hyperplan de E si et seulement s'il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$x \in \mathcal{H} \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

La relation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est appelée *équation de l'hyperplan* relativement à la base $\mathcal{B}$.

✓ Si les coordonnées de $x \in \mathcal{H}$ vérifient $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$, alors :

$$\exists\lambda \neq 0,\ (b_1, \ldots, b_n) = \lambda(a_1, \ldots, a_n).$$

– Si E est de dimension n et $(\mathcal{H}_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une famille d'hyperplans de E, alors :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \mathcal{H}_i\right) \leq n - p.$$

Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

✓ Un sous-espace de E de dimension $n - p$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire de p équations à n inconnues.

[S1.4] Endomorphismes remarquables

• **Homothéties vectorielles**

– On appelle *homothétie vectorielle de rapport* $k \in \mathbf{K}^*$, l'endomorphisme h_k de E défini par :

$$\forall x \in E,\ h_k(x) = kx.$$

L'application h_k vérifie les propriétés suivantes :

(i) l'application h_k est un automorphisme de E et $(h_k)^{-1} = h_{1/k}$,

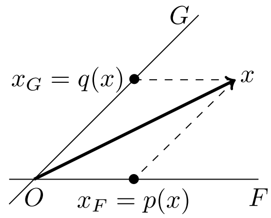
(ii) pour tout $(k, k') \in (\mathbf{K}^*)^2$, $h_k \circ h_{k'} = h_{kk'}$.

• **Projecteurs**

– Soient $E = F \oplus G$ et $x = x_F + x_G$ la décomposition de $x \in E$ suivant F et G ; on pose :

$$p : x \mapsto x_F \quad \text{et} \quad q : x \mapsto x_G.$$

L'application p (respectivement q) est appelée *projection* sur F (respectivement G) parallèlement à G (respectivement F).



L'application p vérifie les propriétés suivantes :

(i) $p \circ p = p$,

(ii) $p + q = \mathrm{Id}_E$,

(iii) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$,

(iv) $\mathrm{Ker}\, p = G,\ \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(q) = F$.

– Réciproquement, si p est un *projecteur*, c'est-à-dire un endomorphisme de E qui vérifie $p \circ p = p$, alors :

(i) $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - p)$;

(ii) $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$;

(iii) p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.

– *Projecteurs associés à une décomposition en somme directe*

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$ et si $x = x_1 + \cdots + x_m$ est la décomposition de x suivant les sous-espaces vectoriels E_i, alors pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, l'application :

$$p_i : x \mapsto x_i$$

est appelée *projecteur sur E_i parallèlement à* $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

L'application p_i vérifie les propriétés suivantes :

(i) $p_i \circ p_i = p_i$,

(ii) $i \neq j \implies p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = 0$,

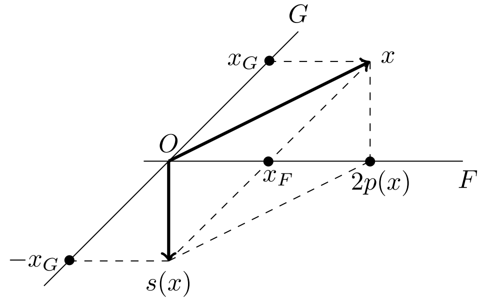
(iii) $\sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{Id}_E$,

(iv) $\mathrm{Im}\, p_i = E_i, \quad \mathrm{Ker}\, p_i = \bigoplus_{j \neq i} E_j$.

- **Symétries**

– Soient $E = F \oplus G$ et $x = x_F + x_G$ la décomposition de $x \in E$ suivant F et G. La *symétrie par rapport à F parallèlement à G* est l'endomorphisme s de E tel que :

$$s : x \mapsto x_F - x_G \quad i.e. \quad s = 2p - \mathrm{Id}_E.$$



L'application s vérifie les propriétés suivantes :

(i) $s|_F = \mathrm{Id}_F$ (la restriction de s à F est l'application identité de F),

(ii) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$,

(iii) s est bijective et $s^{-1} = s$.

– Réciproquement, si s est une *symétrie*, c'est-à-dire un endomorphisme de E qui vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, alors :

(i) $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$;

(ii) s est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.

[S1.5] Matrices

- **Matrice d'une application linéaire**

– Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n et de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.
Pour toute application linéaire f de E dans F, on a pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i.$$

Si C_j est la matrice colonne des composantes du vecteur $f(e_j)$ relativement à la base $\mathcal{B}'$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) &= (C_1, \ldots, C_p) \\
&= \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}).
\end{aligned}$$

✓ On désigne par $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls et I_n la matrice identité ou matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, c'est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

– Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a :

(*i*) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$;

(*ii*) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.
De plus, si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ vérifie :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

– Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f est bijectif si, et seulement si, sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible. L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$.

- **Sous-espaces stables**

– Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ x \in F \implies f(x) \in F.$$

Dans ce cas, l'application $f|_F$ définie par :

$$\forall x \in F,\ f|_F(x) = f(x)$$

est un endomorphisme de F, appelé *endomorphisme induit* par f sur F.

– Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base adaptée au sev F, c'est-à-dire que $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F.
Un endomorphisme f laisse stable F si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{n-p,p} & \vdots & C \end{pmatrix},$$

où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f|_F) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.

✓ Si $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et si chaque sev E_i est stable par un endomorphisme f de E, alors la matrice de f dans une base adaptée $(\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_m)$ à cette somme directe est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix},$$

où $A_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(f|_{E_i}) \in \mathcal{M}_{\dim E_i}(\mathbf{K})$ $(i \in [\![1, n]\!])$.