

SAVOIRS

Thème 1 - Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout ce chapitre, \mathbf{K} désigne \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

[S1.1] Familles quelconques de vecteurs

Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel (que l'on note parfois \mathbf{ev}), I un ensemble non vide quelconque et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

• Famille génératrice

- On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ tout vecteur de la forme $x = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j$ où J est une partie finie de I et λ_j est un scalaire.

L'ensemble de ces combinaisons linéaires est noté $\text{Vect}((x_i)_{i \in I})$, c'est un sous-espace vectoriel (que l'on note parfois \mathbf{sev}) de E .

- On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une *famille génératrice* de E si $\text{Vect}((x_i)_{i \in I}) = E$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \exists J \subset I (J \text{ finie}), \exists (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbf{K}^J \text{ tel que } x = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j.$$

• Famille libre

- On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une *famille libre* de E si pour tout sous-ensemble fini J de I , la famille finie $(x_j)_{j \in J}$ est libre, c'est-à-dire :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0 \implies \forall j \in J, \lambda_j = 0.$$

Une famille est dite *liée* si elle n'est pas libre.

✓ Si une famille est liée, alors l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres vecteurs.

• Base

- On dit qu'une famille de vecteurs de E est une *base* de E si elle est libre et génératrice de E .
- La famille des polynômes $(P_k)_{k \in \mathbf{N}}$ telle que, pour tout entier naturel k , $\deg(P_k) = k$ est une base de $\mathbf{K}[X]$. On dit que la famille $(P_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est *échelonnée en degré*.

En particulier, la famille $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$.

✓ Si E est de dimension finie n et $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$ une famille de n vecteurs de E , alors :

\mathcal{F} est une base de $E \iff \mathcal{F}$ est libre $\iff \mathcal{F}$ est génératrice de E .

[S1.2] Somme de sous-espaces vectoriels

- On note $\sum_{i=1}^p E_i$ l'ensemble $\{x_1 + \dots + x_p \mid (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\}$;

$\sum_{i=1}^p E_i$ est appelé *somme* des sous-espaces vectoriels E_i .

L'ensemble $\sum_{i=1}^p E_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

- Si, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, \mathcal{F}_i est une famille génératrice de E_i , alors $\bigcup_{i=1}^p \mathcal{F}_i$ est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^p E_i$.

- La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est une *somme directe* si :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^p E_i, \exists!(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, x = \sum_{i=1}^p x_i.$$

La somme directe est notée : $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$.

✓ Une somme est directe si, et seulement si, la seule décomposition de 0_E dans la somme directe est $0_E = \sum_{i=1}^p 0_{E_i}$.

- On appelle *base adaptée* à une somme directe $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ de sous-espaces vectoriels, toute base de la somme directe de la forme $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ où \mathcal{B}_i est une base de E_i pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

✓ Si tous les E_i sont de dimensions finies, alors :

$$\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_p) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p).$$

- Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits *supplémentaires* si, et seulement si, E est la somme directe de F et G , soit $E = F \oplus G$.

✓ $E = F \oplus G \iff E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

[S1.3] Applications linéaires

• Définitions

- Soient E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite *linéaire* si :

$$\forall(x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

L'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F est un \mathbf{K} -espace vectoriel ; il est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

– Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle :

* *noyau* de f , le sous-espace vectoriel de E :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\},$$

* *image* de f , le sous-espace vectoriel de F :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

✓ Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((f(e_1), \dots, f(e_n))).$$

– Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$.

– Soit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective ;

(ii) $\text{Ker}(f) = \{0\}$;

(iii) $\forall x \in E, f(x) = 0 \implies x = 0$.

– On dit que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est :

* une *forme linéaire* si $F = \mathbf{K}$,

* un *endomorphisme* si $E = F$,

* un *isomorphisme* si f est bijective,

* un *automorphisme* si f est bijective et $E = F$.

• Théorème du rang

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie vers un espace vectoriel F , on a :

$$\dim E = \text{rg } f + \dim(\text{Ker } f).$$

✓ Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie n vers un espace vectoriel F de même dimension, alors :

$$\begin{aligned} f \text{ est bijectif} &\iff f \text{ est injectif} \iff f \text{ est surjectif} \\ &\iff \dim(\text{Ker } f) = 0 \iff \text{rg } f = n. \end{aligned}$$

• Hyperplans

– Un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire, autrement dit :

$$\mathcal{H} \text{ est un hyperplan} \iff \exists e \in E, E = \mathcal{H} \oplus \mathbf{K}e.$$

✓ Si E est de dimension finie n , les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$.

- \mathcal{H} est un hyperplan si, et seulement si, \mathcal{H} est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Si l'on note (x_1, \dots, x_n) les coordonnées d'un vecteur x de E relatives à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, un ensemble \mathcal{H} est un hyperplan de E si et seulement s'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$x \in \mathcal{H} \iff a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0.$$

La relation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ est appelée *équation de l'hyperplan* relativement à la base \mathcal{B} .

✓ Si les coordonnées de $x \in \mathcal{H}$ vérifient $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$, alors :

$$\exists \lambda \neq 0, (b_1, \dots, b_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n).$$

- Si E est de dimension n et $(\mathcal{H}_i)_{i \in [1, p]}$ une famille d'hyperplans de E , alors :

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^p \mathcal{H}_i \right) \leq n - p.$$

Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

✓ Un sous-espace de E de dimension $n - p$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire de p équations à n inconnues.

[S1.4] Endomorphismes remarquables

• Homothéties vectorielles

- On appelle *homothétie vectorielle de rapport* $k \in \mathbf{K}^*$, l'endomorphisme h_k de E défini par :

$$\forall x \in E, h_k(x) = kx.$$

L'application h_k vérifie les propriétés suivantes :

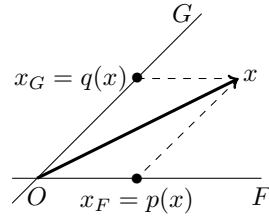
- (i) l'application h_k est un automorphisme de E et $(h_k)^{-1} = h_{1/k}$,
- (ii) pour tout $(k, k') \in (\mathbf{K}^*)^2$, $h_k \circ h_{k'} = h_{kk'}$.

• Projecteurs

- Soient $E = F \oplus G$ et $x = x_F + x_G$ la décomposition de $x \in E$ suivant F et G ; on pose :

$$p : x \mapsto x_F \quad \text{et} \quad q : x \mapsto x_G.$$

L'application p (respectivement q) est appelée *projection* sur F (respectivement G) parallèlement à G (respectivement F).



L'application p vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $p \circ p = p$,
 - (ii) $p + q = \text{Id}_E$,
 - (iii) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$,
 - (iv) $\text{Ker } p = G$, $\text{Im } p = \text{Ker } (q) = F$.
- Réciproquement, si p est un *projecteur*, c'est-à-dire un endomorphisme de E qui vérifie $p \circ p = p$, alors :
- (i) $\text{Im } p = \text{Ker } (\text{Id}_E - p)$;
 - (ii) $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$;
 - (iii) p est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.
- *Projecteurs associés à une décomposition en somme directe*

Si $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ et si $x = x_1 + \dots + x_m$ est la décomposition de x suivant les sous-espaces vectoriels E_i , alors pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, l'application :

$$p_i : x \mapsto x_i$$

est appelée *projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$* .

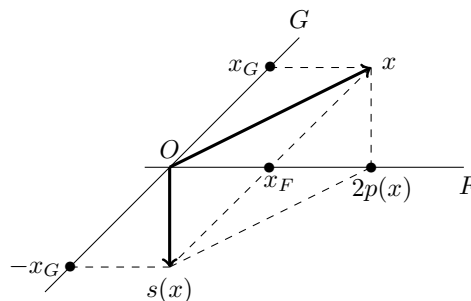
L'application p_i vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $p_i \circ p_i = p_i$,
- (ii) $i \neq j \implies p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = 0$,
- (iii) $\sum_{i=1}^m p_i = \text{Id}_E$,
- (iv) $\text{Im } p_i = E_i$, $\text{Ker } p_i = \bigoplus_{j \neq i} E_j$.

• Symétries

- Soient $E = F \oplus G$ et $x = x_F + x_G$ la décomposition de $x \in E$ suivant F et G . La *symétrie par rapport à F parallèlement à G* est l'endomorphisme s de E tel que :

$$s : x \mapsto x_F - x_G \quad \text{i.e.} \quad s = 2p - \text{Id}_E.$$



L'application s vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $s|_F = \text{Id}_F$ (la restriction de s à F est l'application identité de F),
 - (ii) $s \circ s = \text{Id}_E$,
 - (iii) s est bijective et $s^{-1} = s$.
- Réciproquement, si s est une *symétrie*, c'est-à-dire un endomorphisme de E qui vérifie $s \circ s = \text{Id}_E$, alors :
- (i) $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$;
 - (ii) s est la symétrie vectorielle par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

[S1.5] Matrices

• Matrice d'une application linéaire

- Soient E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives p et n et de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

Pour toute application linéaire f de E dans F , on a pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e'_i.$$

Si C_j est la matrice colonne des composantes du vecteur $f(e_j)$ relativement à la base \mathcal{B}' , alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) &= (C_1, \dots, C_p) \\ &= \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{matrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}). \end{aligned}$$

✓ On désigne par $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls et I_n la matrice identité ou matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, c'est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

– Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a :

- (i) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda f + g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$;
- (ii) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

De plus, si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ vérifie :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

– Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f est bijectif si, et seulement si, sa matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible. L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$.

• **Sous-espaces stables**

– Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, x \in F \implies f(x) \in F.$$

Dans ce cas, l'application $f|_F$ définie par :

$$\forall x \in F, f|_F(x) = f(x)$$

est un endomorphisme de F , appelé *endomorphisme induit* par f sur F .

– Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie n , F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base adaptée au sev F , c'est-à-dire que $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F .

Un endomorphisme f laisse stable F si, et seulement si, sa matrice dans la base \mathcal{B} est triangulaire supérieure par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \dots\dots\dots & & \\ 0_{n-p,p} & \vdots & C \end{pmatrix},$$

où $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f|_F) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.

✓ Si $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et si chaque sev E_i est stable par un endomorphisme f de E , alors la matrice de f dans une base adaptée $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)$ à cette somme directe est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix},$$

où $A_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(f|_{E_i}) \in \mathcal{M}_{\dim E_i}(\mathbf{K})$ ($i \in \llbracket 1, m \rrbracket$).