Chapitre 1

Prérequis

Ce chapitre regroupe les définitions et les résultats sur les tenseurs qui sont utilisés dans la théorie des coques et des membranes. Il comprend deux parties :

1. L'algèbre tensorielle, où seules les opérations algébriques telles l'addition et la multiplication entrent en jeu.
2. L'analyse tensorielle qui implique en plus la notion de la dérivée.

Les résultats seront rappelés sans démonstration, le lecteur qui désire approfondir pourra trouver plus de détails dans les ouvrages mathématiques dédiés à la théorie des tenseurs.

1.1 Algèbre tensorielle

On considère un espace vectoriel euclidien E de dimension 3, muni du produit scalaire usuel $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a}.\mathbf{b}$ et de la norme euclidienne $\|.\|$. On choisit au préalable une base $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ de E, qui n'est pas nécessairement orthonormée.

1.1.1 Composantes contravariantes, covariantes d'un vecteur

Soit un vecteur $\mathbf{u}$ de E, on note u^1, u^2, u^3 les composantes de $\mathbf{u}$ dans la base $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$: $\boxed{\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i}$. La base $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ étant fixée, le vecteur $\mathbf{u}$ est déterminé par les coefficients u^1, u^2, u^3.

D'autre part, le vecteur $\mathbf{u}$ est aussi déterminé par les trois coefficients notés $\boxed{u_i \equiv \mathbf{u}.\mathbf{g}_i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. En effet, nous avons

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, u_i \equiv \mathbf{u}.\mathbf{g}_i = (u^j \mathbf{g}_j).\mathbf{g}_i = u^j (\mathbf{g}_i.\mathbf{g}_j) \tag{1.1}$$

où on a adopté la convention d'Einstein de sommation implicite sur tout indice répété, ici sur l'indice j variant de 1 à 3. En notant

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \boxed{g_{ij} \equiv \mathbf{g}_i.\mathbf{g}_j} \tag{1.2}$$

on peut réécrire (1.1) sous la forme matricielle :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{array} \right\} \tag{1.3}$$

La matrice 3×3 $[g_{..}]$ de composantes $g_{ij}, i, j \in \{1, 2, 3\}$, est symétrique. Elle est *inversible* puisque $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ est une base et par conséquent l'un des triplets (u^1, u^2, u^3) et (u_1, u_2, u_3) permet de déterminer l'autre.

Définitions. (1.4)

– *Les composantes contravariantes* du vecteur $\mathbf{u}$ dans la base $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ sont les composantes u^1, u^2, u^3 dans cette base. Elles sont telles que $\boxed{\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i}$.

– *Les composantes covariantes* du vecteur $\mathbf{u}$ dans la base $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ sont les coefficients u_1, u_2, u_3 définis par $\boxed{u_i \equiv \mathbf{u}.\mathbf{g}_i}$.

La convention de notation avec les indices supérieurs et inférieurs est systématiquement adoptée en théorie des tenseurs. Son intérêt, comme on le verra dans la suite, est de permettre une lecture facile et une écriture systématique des formules.

Illustrons les notions de composantes contravariantes et covariantes dans le cas de l'espace $\mathbb{R}^2$ de dimension deux. On choisit une base $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, formée de deux vecteurs *normés* $(\|\mathbf{g}_1\| = \|\mathbf{g}_2\| = 1)$, et on considère un vecteur $\mathbf{u}$ quelconque. Sur la figure 1.1 :

– les composantes contravariantes u^1, u^2 du vecteur $\mathbf{u}$ sont les composantes obliques suivant $\mathbf{g}_1$ et $\mathbf{g}_2$.

– les composantes covariantes u_1, u_2 sont les mesures des projections orthogonales de $\mathbf{u}$ sur $\mathbf{g}_1$ et $\mathbf{g}_2$.

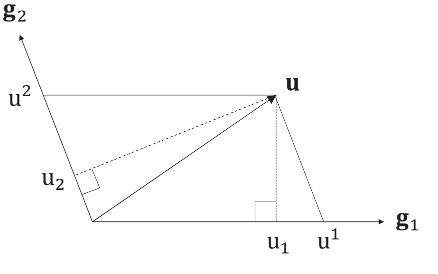

***Figure 1.1** – Illustration dans $\mathbb{R}^2$ des composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur $\mathbf{u}$*

A travers cet exemple, on constate que les composantes contravariantes et covariantes sont en général distinctes. D'après la relation (1.3), la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient identiques est que la matrice $[g_{\cdot\cdot}]$ soit égale à la matrice identité, c'est-à-dire que la base $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ soit *orthonormée*.

Théorème. Soient un vecteur $\mathbf{u}$ de composantes contravariantes u^i, covariantes u_i, et un vecteur $\mathbf{v}$ de composantes contravariantes v^i, covariantes v_i. Le produit scalaire entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ a pour expressions

$$\boxed{\mathbf{u}.\mathbf{v} = u^i v_i = u_i v^i} \qquad (1.5)$$

1.1.2 Base duale

Notation. Les composantes de la matrice inverse de $[g_{\cdot\cdot}]$ sont notées g^{ij} :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \qquad \boxed{g^{ij} \equiv \left([g_{\cdot\cdot}]^{-1}\right)_{ij} = g^{ji}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \quad \text{et} \quad g_{ik} g^{kj} = \delta^j_i}$$

où δ^i_j (noté aussi δ_{ij}) est le symbole de Kronecker $\left\{ \begin{array}{ll} \delta^i_j = 1 & \text{si } i = j \\ \delta^i_j = 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$.

Théorème et définition. La famille de vecteurs notée $\boxed{(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)}$, définie par

$$\boxed{\mathbf{g}^i \equiv g^{ij}\mathbf{g}_j} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{g}_i \equiv g_{ij}\mathbf{g}^j} \tag{1.6}$$

est *une base* de E. Elle est appelée *la base duale* de $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$. Par opposition, la base $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ est appelée *la base primale*.

On retiendra que la base duale est construite selon la chaîne suivante

$$\begin{array}{c} \text{base primale} \\ (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) \end{array} \quad \rightarrow \quad \text{matrice } [g_{\cdot\,\cdot}] \quad \rightarrow \quad \text{matrice inverse } [g^{\cdot\,\cdot}] \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{base duale} \\ (\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3) \end{array}$$

Le théorème suivant fournit une caractérisation de la base duale, autre que la définition (1.6) :

Théorème.
- On a la propriété d'*orthogonalité* suivante entre les vecteurs de la base primale et ceux de la base duale :
$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \boxed{\mathbf{g}_i.\mathbf{g}^j = \delta_i^j}$$
- Inversement, tout triplet de vecteurs $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$ vérifiant $\mathbf{g}_i.\mathbf{a}^j = \delta_i^j$ est confondu à la base duale : $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \mathbf{a}^i = \mathbf{g}^i$.

La relation suivante est l'homologue de (1.2) :

Théorème.
$$\boxed{\mathbf{g}^i.\mathbf{g}^j = g^{ij}}$$

La base duale est en général différente de la base primale, sauf dans un cas spécial :

Théorème. La base primale est *orthonormée* $\Leftrightarrow$ la base duale est *identique* à la base primale.

1.1.3 Différentes représentations d'un vecteur

Théorème.
- On a les relations suivantes entre les composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur $\mathbf{u}$:
$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \boxed{u_i = g_{ij}u^j}, \text{ inversement } \boxed{u^i = g^{ij}u_j}$$
Ainsi, on abaisse ou on élève les indices grâce aux matrices g_{ij} et g^{ij}.
- La relation suivante est l'homologue de $u_i \equiv \mathbf{u}.\mathbf{g}_i$:
$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \boxed{u^i = \mathbf{u}.\mathbf{g}^i}$$

Théorème et définition. On peut exprimer un vecteur soit dans la base primale, soit dans la base duale comme suit

$$\boxed{\mathbf{u} \equiv u^i\mathbf{g}_i = u_i\mathbf{g}^i} \tag{1.7}$$

Ces deux formes sont appelées *les représentations contravariantes et covariantes de* $\mathbf{u}$.

Du théorème précédent, on écrit aussi $\mathbf{u} \equiv (\mathbf{u}.\mathbf{g}^i)\mathbf{g}_i = (\mathbf{u}.\mathbf{g}_i)\mathbf{g}^i$.

Théorème. Le produit scalaire entre deux vecteurs **u** et **v** peut s'écrire de manières différentes

$$\boxed{\mathbf{u}.\mathbf{v} = u^i v_i = u_i v^i = g_{ij} u^j v^i = g^{ij} u_j v_i} \tag{1.8}$$

1.1.4 Résultats liés à l'orientation de l'espace de dimension 3

Les résultats précédents, écrits dans un espace de dimension 3, peuvent se généraliser au cas d'un espace de dimension n finie quelconque, moyennant des changements de notation évidents. En revanche, les résultats dans ce paragraphe ne sont applicables qu'à un espace de dimension 3.

Comme l'espace E est de dimension 3, on peut l'orienter et y définir un produit vectoriel. On obtient alors les résultats suivants relatifs au produit vectoriel ou au produit mixte.

Théorème.

$$\boxed{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)\, \mathbf{g}^3} \quad \boxed{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)\, \mathbf{g}^1} \quad \boxed{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)\, \mathbf{g}^2}$$

$$\text{Inversement} \quad \boxed{\mathbf{g}^1 \times \mathbf{g}^2 = (\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)\, \mathbf{g}_3} \quad \boxed{\mathbf{g}^2 \times \mathbf{g}^3 = (\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)\, \mathbf{g}_1} \quad \boxed{\mathbf{g}^3 \times \mathbf{g}^1 = (\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)\, \mathbf{g}_2} \tag{1.9}$$

Les vecteurs $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ sont *orthogonaux* au vecteur $\mathbf{g}^3$, mais ils ne sont en général pas orthogonaux au vecteur $\mathbf{g}_3$, figure 1.2.

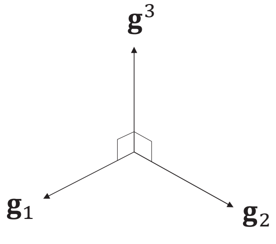

***Figure 1.2** – Produit vectoriel de deux vecteurs de la base primale*

Théorème.

$$\boxed{(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3) = \frac{1}{(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)}} \tag{1.10}$$

Ainsi, les deux bases primale et duale ont la même orientation.

Théorème.

Hypothèse : la base $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ est *directe* (d'après (1.10), ceci équivaut à supposer que la base $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$ est directe).

Alors

$$\boxed{(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) = \sqrt{g}} \quad \text{et} \quad \boxed{(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3) = \frac{1}{\sqrt{g}}} \quad \text{où} \ \boxed{g \equiv \det[g_{\cdot\cdot}]} \tag{1.11}$$

En combinant (1.9) et (1.11), on arrive à

Théorème.

$$\boxed{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 = \sqrt{g}\, \mathbf{g}^3} \quad \boxed{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 = \sqrt{g}\, \mathbf{g}^1} \quad \boxed{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 = \sqrt{g}\, \mathbf{g}^2}$$

$$\text{Inversement} \quad \boxed{\mathbf{g}^1 \times \mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3}{\sqrt{g}}} \quad \boxed{\mathbf{g}^2 \times \mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{g}}} \quad \boxed{\mathbf{g}^3 \times \mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2}{\sqrt{g}}} \tag{1.12}$$

1.1.5 Tenseur

Définition. (1.13)

Un tenseur d'ordre p, où p est un entier non nul, est par définition *une forme multilinéaire* d'ordre p sur E^p. Plus précisément, si la forme T

$$\begin{array}{llcl} T: & E \times \cdots \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{u}^1, \cdots, \mathbf{u}^p) & \mapsto & T(\mathbf{u}^1, \cdots, \mathbf{u}^p) \end{array}$$

est un tenseur d'ordre p, il vérifie les propriétés de p-linéarité suivantes :
$\forall (\mathbf{u}^1, \cdots, \mathbf{u}^p) \in E^p$, $\forall i \in [1, p]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} \in E$,

$$\boxed{\begin{array}{lcl} T(\mathbf{u}^1, \cdots, \lambda \mathbf{u}^i, \cdots, \mathbf{u}^p) & = & \lambda\, T(\mathbf{u}^1, \cdots, \mathbf{u}^i, \cdots, \mathbf{u}^p) \\ T(\mathbf{u}^1, \cdots, \mathbf{u}^i + \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{u}^p) & = & T(\mathbf{u}^1, \cdots, \mathbf{u}^i, \cdots, \mathbf{u}^p) + T(\mathbf{u}^1, \cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{u}^p) \end{array}} \tag{1.14}$$

L'algèbre tensorielle est donc l'algèbre multilinéaire.

On adoptera le système de notations génériques suivant :

- un tenseur d'ordre 1 est noté par une lettre surmontée d'une barre, par exemple $\bar{a}$,
- un tenseur d'ordre 2, qui est usuellement noté par une lettre surmontée de deux barres, par exemple $\bar{\bar{T}}$, sera désigné dans ce cours plutôt par une lettre en gras (comme pour les vecteurs), par exemple $\mathbf{T}$,
- un tenseur d'ordre ≥ 3 est usuellement noté par une lettre surmontée de autant de barres que l'ordre du tenseur, mais pour alléger l'écriture on le notera plutôt par une lettre en double trait, par exemple $\mathbb{T}$.

La définition (1.13) est intrinsèque dans ce sens qu'elle ne fait pas intervenir de base de E. Dans la suite, on va expliciter l'image d'un tenseur en passant par la base $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ (et sa base duale $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$).

Théorème et définition. Soit $\bar{a}$ un tenseur d'ordre 1. On a

$$\forall \text{ vecteurs } \mathbf{u} \in E, \qquad \boxed{\bar{a}(\mathbf{u}) = a_i u^i = a^i u_i} \tag{1.15}$$

où

- les coefficients $\boxed{a_i \equiv \bar{a}(\mathbf{g}_i)}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, sont appelés *les composantes covariantes* du tenseur d'ordre 1 $\bar{a}$,
- et les coefficients $\boxed{a^i \equiv \bar{a}(\mathbf{g}^i)}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, *les composantes contravariantes* du tenseur d'ordre 1 $\bar{a}$.

Les notations a_i, a^i utilisées ici sont cohérentes avec celles dans la définition (1.4) puisqu'on verra plus loin qu'elles sont aussi les composantes covariantes et contravariantes d'un *vecteur* $\mathbf{a}$.

Les composantes covariantes et contravariantes sont reliées par $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\boxed{a^i = g^{ij} a_j}$.

Le tenseur $\bar{a}$ est complètement défini lorsqu'on connaît toutes les composantes a_i ou a^i.

L'énoncé sur un tenseur d'ordre 2 est analogue :

Théorème et définition. Soit $\mathbf{T}$ un tenseur d'ordre 2. On a

$$\forall \text{ vecteurs } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \qquad \boxed{\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T_{ij} v^j u^i = T_i{}^j v_j u^i = T^i{}_j v^j u_i = T^{ij} v_j u_i} \tag{1.16}$$

où

– les coefficients $\boxed{T_{ij} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)}$ sont appelés *les composantes 2-covariantes* de $\mathbf{T}$,
– les coefficients $\boxed{T^{ij} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)}$ *les composantes 2-contravariantes* de $\mathbf{T}$,
– et les coefficients $\boxed{T_i{}^j \equiv \mathbf{T}(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j)}$, $\boxed{T^i{}_j \equiv \mathbf{T}(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_j)}$ *les composantes 1-covariante-1-contravariante* ou encore *les composantes mixtes* de $\mathbf{T}$.
Ces composantes sont reliées par : $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$,

$$\boxed{T^i{}_j = g^{ik} T_{kj}} \quad \boxed{T_i{}^j = g_{ik} T^{kj} = T_{ik} g^{kj}} \quad \boxed{T^{ij} = g^{ik} T_{k\ell} g^{\ell j} = g^{ik} T_k{}^j} \quad \boxed{T_{ij} = T_i{}^k g_{kj} = g_{ik} T^{k\ell} g_{\ell j}} \tag{1.17}$$

Le tenseur $\mathbf{T}$ est complètement défini lorsqu'on connaît toutes les composantes T_{ij} ou T^{ij} ou $T_i{}^j$ ou $T^i{}_j$.

L'énoncé précédent se généralise facilement à tout tenseur d'ordre supérieur, on obtient ainsi par exemple pour un tenseur d'ordre 3 :

Théorème et définition. Soit $\mathbb{T}$ un tenseur d'ordre 3. On a

$$\forall \text{ vecteurs } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \qquad \boxed{\mathbb{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = T_{ijk} w^k v^j u^i = T_i{}^j{}_k w^k v_j u^i = \cdots}$$

où par exemple les coefficients $\boxed{T_i{}^j{}_k \equiv \mathbb{T}(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}_k)}$ sont appelés *les composantes mixtes* de $\mathbb{T}$.

On passe d'un type de composantes à l'autre par des relations comme $\boxed{T_{ijk} = g_{im} T^m{}_{jk}}$.

Les différents types de composantes d'un tenseur diffèrent simplement par la position supérieure ou inférieure des indices. En règle générale, on abaisse ou on élève les indices des composantes d'un tenseur d'ordre 2 $\mathbf{T}$ grâce aux coefficients g_{ij} et g^{ij} :
– pour descendre un indice contravariant, on utilise g_{ij} : $T^{\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\, i\,\cdot} = g_{ij} T^{\cdot\, j\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot}$
– pour monter un indice covariant, on utilise g^{ij} : $T^{\cdot\, i\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot} = g^{ij} T^{\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\, j\,\cdot}$

Théorème. L'ensemble des tenseurs d'ordre p (entier donné), muni de la loi interne 'addition des applications' et de la loi externe 'multiplication d'une application par un scalaire', est *un espace vectoriel.*

• Nous allons faire deux conventions de langage qui s'avèrent dans la suite très commodes.

Convention. Par convention, on dit qu'un scalaire est un tenseur d'ordre 0. (1.18)

Cette convention est un abus de langage car une forme 0-fois linéaire n'a pas de sens, contrairement à une forme linéaire ou bilinéaire qui sont parfaitement définies. Comme on le verra au paragraphe 1.1.9, elle permet de dire par exemple que le produit doublement contracté $\mathbf{S} : \mathbf{T}$ de deux tenseurs d'ordre 2 $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ est un tenseur d'ordre $2 + 2 - 2 \times 2 = 0$, c'est-à-dire que $\mathbf{S} : \mathbf{T}$ est un scalaire.

La deuxième convention s'appuie sur le résultat suivant :

Théorème et définition. (1.19)

(a) Pour tout vecteur $\mathbf{a}$, il existe une et une seule forme linéaire notée $\bar{a}$ vérifiant $\forall \mathbf{u} \in E, \mathbf{a}.\mathbf{u} = \bar{a}(\mathbf{u})$.
La forme $\bar{a}$ s'appelle *la forme linéaire associée au vecteur* $\mathbf{a}$.

(b) Pour toute forme linéaire $\bar{a}$, il existe un et un seul vecteur noté $\mathbf{a}$ vérifiant $\forall \mathbf{u} \in E, \bar{a}(\mathbf{u}) = \mathbf{a}.\mathbf{u}$.
Ce vecteur est $\mathbf{a} = \bar{a}(\mathbf{g}_i)\mathbf{g}^i$, il s'appelle *le vecteur associé à la forme linéaire* $\bar{a}$.

Dans l'énoncé précédent, il est licite d'utiliser la même lettre a pour le vecteur $\mathbf{a}$ et pour le tenseur d'ordre 1 $\bar{a}$. En effet :

– selon la définition (1.4), $a_i \equiv \mathbf{a}.\mathbf{g}_i$ est la i-ème composante covariante du vecteur $\mathbf{a}$,

– selon la définition après (1.15), $a_i \equiv \bar{a}(\mathbf{g}_i)$ est la i-ème composante covariante du tenseur $\bar{a}$.

et on sait que $\mathbf{a}.\mathbf{g}_i = \bar{a}(\mathbf{g}_i)$.

Le théorème (1.19) conduit à adopter la convention suivante :

Convention. Un tenseur d'ordre 1 $\bar{a}$ sera désigné abusivement par son vecteur associé $\mathbf{a}$. Inversement, un vecteur $\mathbf{a}$ sera appelé un tenseur d'ordre 1. (1.20)

C'est ainsi qu'on écrira $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ au lieu de $\bar{a}(\mathbf{u})$: le vecteur $\mathbf{a}$ sera confondu avec la forme linéaire $E \ni \mathbf{u} \mapsto \mathbf{a}.\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ et on a l'égalité $\boxed{\mathbf{a}(\mathbf{u}) = \mathbf{a}.\mathbf{u}}$ où $\mathbf{a}$ du premier membre est compris comme une forme linéaire alors que $\mathbf{a}$ du second membre est un vecteur de E.

• Pour aller plus loin, on a besoin du théorème suivant :

Théorème. Un tenseur d'ordre p fait correspondre à q vecteurs donnés ($q \leq p$) un tenseur d'ordre $p - q$, dépendant linéairement de chacun des q vecteurs. (1.21)

Comme application de ce théorème, on va montrer qu'on peut assimiler les tenseurs d'ordre 2 à des applications linéaires. Considérons donc un tenseur $\mathbf{T}$ d'ordre 2.

– Par définition, $\mathbf{T}$ est la forme bilinéaire

$$\mathbf{T} : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \mapsto & \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{array} \tag{1.22}$$

qui à chaque couple de vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ associe le scalaire $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

– D'autre part, considérons l'application de E dans E :

$$\mathbf{T}(\,.\,, \odot) : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{T}(\,.\,, \mathbf{v}) \end{array} \tag{1.23}$$

(la première variable de $\mathbf{T}$ symbolisée par le point est laissée libre, la seconde variable symbolisée par $\odot$ prend la valeur $\mathbf{v}$). D'après le théorème (1.21), pour chaque vecteur $\mathbf{v}$, $\mathbf{T}(\,.\,, \mathbf{v})$ est un tenseur d'ordre $2 - 1 = 1$, c'est-à-dire un vecteur d'après la convention (1.20). De plus, la bilinéarité de $\mathbf{T}$ implique que le vecteur $\mathbf{T}(\,.\,, \mathbf{v})$ dépend linéairement de $\mathbf{v}$.

Ainsi, (1.23) est une application linéaire de E dans E qui à chaque vecteur $\mathbf{v}$ associe un vecteur $\mathbf{T}(\,.\,, \mathbf{v})$ dépendant linéairement de $\mathbf{v}$.

D'après cette analyse, on peut voir le tenseur $\mathbf{T}$ d'ordre 2 de deux manières :

– soit comme *la forme bilinéaire* (1.22) (on opère sur $E \times E$ et on arrive dans $\mathbb{R}$),

– soit comme *l'application linéaire* (1.23), $\mathbf{T} : \mathbf{v} \mapsto$ un vecteur dépendant linéairement de $\mathbf{v}$ (on opère sur E et on arrive dans E).

Ce double point de vue est spécifique aux tenseurs du second ordre, il permet de considérer que les deux terminologies 'tenseur du second ordre' et 'application linéaire' sont *synonymes*.

1.1.6 Tenseur métrique

Définition. *Le tenseur métrique* est le tenseur d'ordre 2, noté $\mathbf{g}$, défini par

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \qquad \boxed{\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{u}.\mathbf{v}} \tag{1.24}$$

La notation $\mathbf{g}$ utilisée est cohérente avec celles introduites plus haut. En effet :

– selon la notation (1.2), on a $g_{ij} \equiv \mathbf{g}_i.\mathbf{g}_j$,
– selon la définition après (1.16), l'image de la forme bilinéaire $\mathbf{g}$ sur deux vecteurs $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j$ est $g_{ij} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$, égale à la composante 2-covariante de $\mathbf{g}$,
– et on sait que $\mathbf{g}(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j) = \mathbf{g}_i.\mathbf{g}_j$.

On verra plus loin que le tenseur métrique est égal au tenseur identité du second ordre noté $\mathbf{I}$.

1.1.7 Produit tensoriel

On envisagera deux types d'opérations algébriques sur les tenseurs : le produit tensoriel et le produit contracté. Pour les tenseurs d'ordre 2, on ajoutera deux opérations supplémentaires : la transposition et l'inversion.

On va présenter la notion du produit tensoriel sur l'exemple des tenseurs $\mathbf{S}$, $\mathbb{T}$ et $\mathbf{U}$ d'ordre 2, 3, et 2, resp., sachant que le raisonnement est généralisable à tout uplet de tenseurs d'ordres quelconques.

Définition. *Le produit tensoriel* de $\mathbf{S}$ par $\mathbb{T}$, noté $\mathbf{S} \otimes \mathbb{T}$ est le tenseur d'ordre $2 + 3 = 5$ défini par

$$\forall \text{ vecteurs } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \boxed{(\mathbf{S} \otimes \mathbb{T})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \mathbb{T}(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y})} \tag{1.25}$$

(l'application $\mathbf{S} \otimes \mathbb{T}$ ainsi définie est bien une forme multilinéaire d'ordre 5.)

Théorème.

(a) L'opération 'produit tensoriel' est *associative* : $(\mathbf{S} \otimes \mathbb{T}) \otimes \mathbf{U} = \mathbf{S} \otimes (\mathbb{T} \otimes \mathbf{U})$, ce qui permet d'écrire sans les parenthèses $\mathbf{S} \otimes \mathbb{T} \otimes \mathbf{U}$.
L'image du produit $\mathbf{S} \otimes \mathbb{T} \otimes \mathbf{U}$ est donnée par $(\mathbf{S} \otimes \mathbb{T} \otimes \mathbf{U})(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{S}(\mathbf{s}, \mathbf{t})\, \mathbb{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\, \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

(b) L'opération 'produit tensoriel' est *distributive* (à gauche et à droite) par rapport à l'addition :

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \otimes (\mathbf{S} + \mathbf{U}) &= \mathbb{T} \otimes \mathbf{S} + \mathbb{T} \otimes \mathbf{U} \\ (\mathbf{S} + \mathbf{U}) \otimes \mathbb{T} &= \mathbf{S} \otimes \mathbb{T} + \mathbf{U} \otimes \mathbb{T} \end{aligned}$$

(c) L'opération 'produit tensoriel' n'est *pas* commutative : $\mathbf{S} \otimes \mathbb{T} \neq \mathbb{T} \otimes \mathbf{S}$.

En écrivant le théorème précédent pour les tenseurs d'ordre 1 (c'est-à-dire les vecteurs), on obtient

$$\forall \text{ vecteurs } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}), \text{ ce qui permet d'écrire sans les parenthèses } \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}.$$

L'image du produit $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$ est donnée par $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{a}.\mathbf{u})(\mathbf{b}.\mathbf{v})(\mathbf{c}.\mathbf{w})$.
En particulier, $(\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k)(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = u^i v_j w^k$.

La propriété d'associativité se généralise à n'importe quel produit tensoriel impliquant plusieurs vecteurs, et on l'écrira sans les parenthèses $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_q$.

Le théorème suivant donne les composantes d'un produit vectoriel relatives aux vecteurs de base $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ ou leurs duaux $\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3$.

Théorème. Les composantes d'un produit tensoriel sont les produits des composantes de chaque tenseur :

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathbf{S} \otimes \mathbb{T})_{ijk\ell m} &= S_{ij} T_{k\ell m} \\ (\mathbf{S} \otimes \mathbb{T})_i{}^{jk\ell}{}_m &= S_i{}^j\, T^{k\ell}{}_m \\ \text{etc.} & \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} (\mathbf{S} \otimes \mathbb{T} \otimes \mathbf{U})_{ijk\ell mnp} &= S_{ij} T_{k\ell m} U_{np} \\ (\mathbf{S} \otimes \mathbb{T} \otimes \mathbf{U})_i{}^j{}_k{}^\ell{}_m{}^n{}_p &= S_i{}^j\, T^\ell{}_{k\,m} U^n{}_p \\ \text{etc.} & \end{aligned}}$$