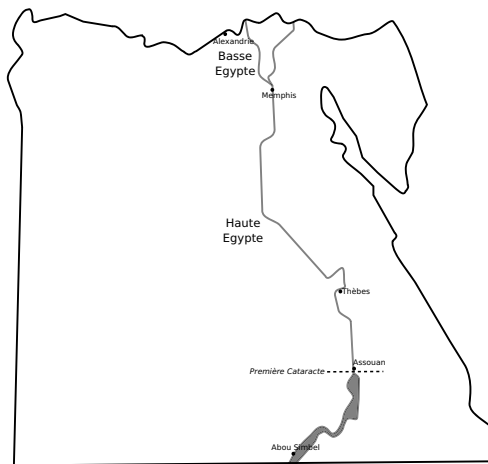


# RÉFLEXIONS ANTIQUES ET MODERNES SUR LES NOMBRES PREMIERS

*Constantin Raïos, Nadia El Mrabet*



L'Egypte et le Nil

La fonction originelle des mathématiques fut peut-être de simplifier le quotidien de tout un chacun : compter plus facilement les bêtes d'un troupeau, mesurer la superficie d'un terrain agricole, ou encore prévoir les pertes et gains d'un commerce. Les premiers problèmes mathématiques complexes de l'antiquité grecque sont issus de situations apparemment simples de la vie courante. Par exemple, Théon de Smyrne (*De utilitate mathematicae*, 2.3) raconte que les Déliens demandèrent à l'oracle de Delphes ce qu'ils pouvaient faire pour mettre un terme à l'épidémie de peste qui les décimait. L'oracle leur enjoignit de doubler la taille de l'autel dédié au dieu Apollon. Cet autel était un cube parfait. Ainsi son volume vaut le cube de la longueur de son côté. Doubler le volume du cube revient donc à multiplier la longueur de son côté par racine cubique de deux, c'est-à-dire le nombre qui, élevé à la puissance trois, donne deux. D'un point de vue pratique, cela revenait à construire la racine cubique du nombre 2 avec les outils à leur disposition, la règle et le compas. Les architectes de l'époque se sont tournés vers Platon pour trouver une solution à leur problème. La réponse de Platon fut assez surprenante : « *Les Dieux n'ont certainement pas besoin d'un autel de taille double, mais par l'intermédiaire de l'oracle, ils reprochent aux Déliens de négliger la géométrie* ». Le problème de la duplication du cube resta longtemps une énigme, et ce n'est que récemment, en 1887, qu'il fut résolu par le français Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) qui prouva qu'il était impossible de construire à la règle et au compas la racine cubique du nombre 2. Cette anecdote dévoile aussi les liens étroits entre les mathématiques et la religion dans l'antiquité, qui ont favorisé la naissance des croyances arithmologiques et qui ont empreint la pensée religieuse de la haute antiquité jusqu'à nos jours.

## 1 Aristide et le pouvoir divin du Nil

Publius Aelius Aristide est né en 117 à Hadrianoi, une petite ville de la Mysie en Asie Mineure (en Turquie actuelle). L'aisance de la famille d'Aristide lui permit de recevoir une éducation soignée : adolescent encore, il quitta son foyer familial pour gagner Smyrne, afin de parfaire sa formation littéraire auprès du grammairien Alexandre de Kotiaion (actuellement Kütahya), futur maître de l'empereur et philosophe Marc Aurèle. Il suivit aussi les cours des grands orateurs de son temps à Smyrne, à Pergame et à Athènes.

À la fin de son éducation rhétorique et avant de se lancer dans la carrière sophistique, il décida de réaliser un voyage en Egypte ; ce pays légendaire et hellénisé permettait à tous les débutants de la rhétorique grecque d'élar-

gir leur public et d'enrichir leurs connaissances. Il séjourna aux environs d'Alexandrie, la deuxième ville de l'Empire Romain, qui conservait encore son prestige et sa renommée de l'époque hellénistique. Aristide déclare avoir aussi voyagé en Haute Egypte, jusqu'aux premières cataractes du Nil et à l'îlot de Philai, c'est-à-dire jusqu'à la frontière éthiopienne de l'Empire.

### 1.1 Mystérieuse Egypte

Dans la tradition grecque, l'Egypte était considérée comme le pays des mystères par excellence. De la multitude de ses curiosités inexplicables, celle qui a préoccupé beaucoup les philosophes, les historiens et les géographes grecs, de l'époque archaïque jusqu'à la fin de l'antiquité, est incontestablement le phénomène des crues périodiques du Nil, le fleuve qui fertilise le pays entier et qui semble défier les lois naturelles en grossissant en été et en décroissant en hiver. Ce « miracle » constitue le sujet du *Discours Egyptien* d'Aelius Aristide. En fait, Aristide doit beaucoup à une pléiade de doxographes et il ne manifeste aucune envie d'ajouter quoi que ce soit à cette ample matière ; il a choisi d'opposer son argumentation et son témoignage personnel aux explications fournies par ses prédécesseurs. L'exorde du *Discours égyptien* annonce la réfutation globale de tous les points de vue de ses devanciers. Notre auteur rejette d'abord l'explication de Thalès, selon laquelle les vents étésiens, les vents du nord de la Méditerranée orientale, qui soufflent contre le courant du fleuve, obstruent les embouchures du Nil en provoquant sa crue. Il réfute aussi le point de vue d'Anaxagore (repris par Eschyle et Euripide) qui soutenait que la fonte des neiges des montagnes éthiopiennes est à l'origine des crues du fleuve. Ensuite il essaie d'expliquer les raisons pour lesquelles les pluies équatoriales, l'inversion des saisons entre l'hémisphère sud (ou le Nil prend sa source) et l'hémisphère nord, la chaleur et le relief égyptien, la localisation des sources du Nil du côté de l'Océan Atlantique et l'attraction des eaux avoisinantes ne sont pas en mesure de fournir une explication valable du comportement mystérieux du grand fleuve de l'Egypte.

Seuls les derniers paragraphes du discours nous dévoilent son vrai but : Aristide veut prouver que le Nil est d'origine divine et que pour cette raison ses caractéristiques sont inconcevables et inexplicables. Pour consolider sa conviction, il donne une liste de paradoxes liés au comportement du Nil en crue. Selon notre auteur, le Nil est le seul fleuve à ne pas faire naître des brises, à offrir aux habitants de ses rives une eau pure, très douce et incorruptible, à devenir la seule source d'un peuple entier, à traverser un désert sans s'éclipser, à soigner les malades, à améliorer la qualité de l'air et à protéger un pays d'épidémies et de désastres naturels.

En ce qui concerne les moyens du Nil pour lutter contre les conditions hostiles du désert égyptien, Aristide met en évidence le comportement « rusé » du fleuve. Quand le fleuve est en crue, sa profondeur varie selon les endroits : à l'extrémité sud du pays (entre Syène et Eléphantine), où la chaleur est presque insupportable, elle atteint les 28 coudées, près du comptoir indien et arabe de Coptos, les 21 coudées, à Memphis, les 14 coudées, et près des marécages du Delta, les 7 coudées. Donc, Aristide pense que la répartition des eaux du Nil permet au fleuve de l'emporter sur l'aridité et la chaleur du désert. Comme il devient plus profond là où la température est plus élevée, l'évaporation de ses eaux est moins sensible. Cette distribution des eaux fluviales constitue selon Aristide une preuve de l'ordre et de la musique (à savoir de l'harmonie) du débordement du Nil de son lit mineur, car le fleuve perd 7 coudées à chaque étape de son trajet du sud au nord de l'Égypte. Mais pour quelle raison le « rythme » de la crue du Nil peut être considéré comme une preuve de la nature divine et de la singularité du fleuve ?

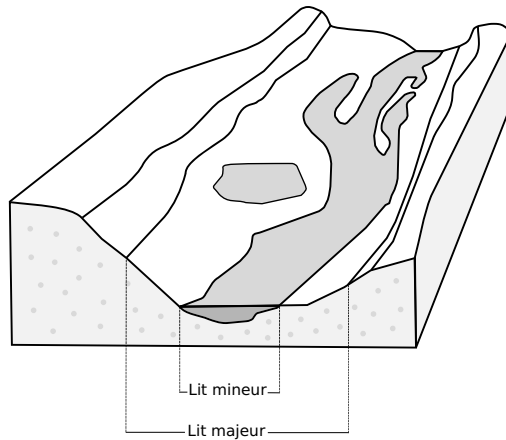


FIGURE 1.1 – Schéma d'une crue

## 1.2 Les chiffres et l'univers dans la pensée grecque

### L'arithmétique du Nil

Aristide n'est pas le premier à avoir souligné la nature divine du Nil en mettant en valeur les variations de la profondeur du fleuve. Dans la religion égyptienne, la crue du Nil était sous le patronage du dieu Thot, une

divinité lunaire à tête d'ibis, qui était aussi considéré comme le scribe des dieux, le protecteur des opérations intellectuelles et l'interprète des réalités primordiales. De ce fait, on n'a pas tardé à associer les étapes de la crue du fleuve aux phases de la lune et, étant donné que le mois lunaire comprend 28 jours divisés en 4 semaines, les 14 coudées à Memphis et les autres mesures de la profondeur du Nil multiples de 7 ont acquis une signification particulière. D'ailleurs les auteurs grecs ont repris cette croyance égyptienne : par exemple, Plutarque, dans son traité sur Isis et Osiris, et Aristide, toujours dans le même discours, comparent la crue et la décrue du Nil aux phases de la lune. Ajoutons ici que pour les Egyptiens de l'époque pharaonique, qui pensaient que Thot se chargeait ainsi de l'arrosage de leurs champs, la hauteur des 7 coudées dans les terres inondées était un heureux évènement.

Néanmoins, le symbolisme apparent du cycle lunaire ne suffit pas à expliquer pourquoi Aristide insiste sur l'ordre et la musique du Nil. Dans la pensée et la religion grecques les nombres jouaient un rôle très important depuis l'époque archaïque. D'ailleurs, l'inventeur des mathématiques et l'homme qui a créé les termes « philosophe » et « philosophie » sont la même personne : Pythagore, l'envoyé d'Apollon.

### Les prémices de l'arithmétique grecque

Au début, les pythagoriciens semblent avoir choisi un mode de vie avant d'articuler autour de lui une pensée philosophique. Leur but était de garder la dignité humaine et d'atteindre à la vérité. En partant de cette volonté, ils sont devenus les auteurs d'une métaphysique rationaliste : pour eux, le Nombre (*arithmos*) est la matière, l'exemple et l'essence universelle des réalités, voire de Dieu. Comme l'Unité (*monas*) est le principe des nombres, elle devient aussi le principe premier, absolu et parfait de l'Univers. Elle est la caractéristique de la divinité et de la plénitude, ainsi que la source du Bien. Par conséquent, du point de vue arithmétique, l'Unité devient le critère principal pour diviser les nombres en pairs et impairs : un nombre impair est celui qui, une fois analysé, peut se répartir également de chaque côté de l'Unité. Une autre façon de subdiviser les nombres consiste à considérer les nombres insécables (ou *premiers*) d'un côté, et les nombres composés de l'autre.

Aristote, par exemple, critiquant la cosmologie pythagoricienne, nous offre un tableau des dix contraires (*Met.* 983a) qui émanent de l'opposition des nombres impairs et pairs et qui doivent provenir de l'école de Pythagore. Dans un autre passage du même ouvrage (*Met.* 1093a), Aristote laisse entendre que les pythagoriciens liaient les 7 voyelles de l'alphabet grec aux 7 cordes de l'échelle musicale et aux 7 étoiles de la constellation des

Pléiades. Dans la cosmologie arithmétique de Nicomaque de Gérase, dont l'*introduction arithmétique* traduite en latin et en arabe a énormément influencé la science mathématique tout au long du Moyen âge jusqu'à la Renaissance, le nombre sept est particulièrement loué et vénéré étant attribué à une pléiade de dieux, comme par exemple Tuché (Fortune), Athéna, Arès, Opulence, Intelligence, Clio, Osiris et Krisis (Jugement).

### La magie du nombre 7

Pour revenir aux rapports entre le nombre 28 et le nombre 7, notons que Philon d'Alexandrie, en essayant de démontrer comment 7 est le nombre qui bénéficie d'une puissance constante et bienfaitrice, remarque que 28 n'est pas seulement un multiple de 7, mais qu'il est aussi obtenu par la sommation des sept premiers nombres ( $1+2+3+4+5+6+7$ ) ; de cette manière, les phases de la lune et le mois lunaire sont symétriquement calqués sur le nombre 7. Il faut noter en outre que beaucoup de fêtes d'Apollon (comme les Thargélies à Athènes), dieu, parmi d'autres, de l'harmonie, de la lumière et de la santé, étaient célébrées le septième jour du mois et que la mystique orphique associait ce nombre au culte d'Athéna, déesse de la sagesse.

Un autre ouvrage, qui a été faussement attribué à Hippocrate (*Sur les semaines*) et qui doit dater probablement de l'époque hellénistique, traite également du nombre sept et de son importance universelle : il dispense vie et mouvement, il influence les êtres célestes et il est associé à la création du monde. L'auteur dresse aussi une liste d'objets et de phénomènes qui comprennent sept parties ou qui obéissent à des règles issues des propriétés du nombre 7.

D'ailleurs, 7 est un nombre auquel on attribue généralement une grande portée mystique et magique. Il est présent dans de nombreuses croyances et traditions des diverses cultures, ou tout simplement au quotidien : *Blanche Neige et les sept nains*, *les bottes de sept lieues*, les sept couleurs de l'arc en ciel, la semaine de sept jours, *les sept samouraïs*, les sept chevaliers de l'apocalypse, *les sept boules de cristal* ou encore les sept balles du jongleur. De surcroît, en mathématiques, certaines propriétés arithmétiques et géométriques mettent en avant le nombre sept. Par exemple, sept est le nombre de côtés du plus petit polygone régulier non constructible à la règle et au compas.

## 2 Les nombres premiers

Parallèlement à la définition du nombre orientée sur l'idée de comptage, les Grecs ont introduit l'idée de briques élémentaires permettant de construire tous les nombres possibles et imaginables, du moins les nombres entiers. Ces briques élémentaires sont les nombres premiers.

### 2.1 Définition

Aristote fait la distinction entre ce qui est divisible en partie discrète, qu'il appelle *pléthos* (multitude), et la multiplicité finie, qu'il appelle *arithmos* (nombre). Pythagore, dont il a été question plus haut, a été le premier à découvrir et à prouver des lois en arithmétique et en géométrie. Il a par exemple conçu les séries des nombres pairs et impairs. En géométrie, la conception du point (issu du sens de l'Unité) lui a permis de définir la droite, la surface et le solide. Malgré les doutes exprimés par certains savants modernes, il est censé avoir prouvé que les angles intérieurs d'un triangle sont égaux à deux droits (180 degrés) ; de même, il a, semble-t-il, prouvé le théorème de Thalès, et il a établi le célèbre théorème qui porte son nom<sup>1</sup> (« Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés »). Par ailleurs, la première approche des nombres étant géométrique, il ne faut pas être surpris par la définition suivante des nombres premiers donnée par Euclide (Elémments, VII) :

- « 1. Est unité ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.
- 2. Et un nombre est la multitude composée d'unités.
- 3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, quand il (= le plus petit) mesure le plus grand. [...]
- 12. Un nombre premier est celui [qui est] mesuré par une seule unité. [...]
- 14. Un nombre composé est celui [qui est] mesuré par un certain nombre. »

### 2.2 Décrypter les nombres premiers

Dans cette définition, l'idée de nombre est géométrique, un nombre A est plus petit qu'un nombre B, si on peut mettre plusieurs fois A dans B. L'idée sous-jacente est celle de la division euclidienne. Par exemple, 7

---

1. Ce théorème était déjà connu en Egypte et en Mésopotamie.

mesure (c'est-à-dire divise) 21, car on peut l'y mettre 3 fois. On peut déjà deviner la définition moderne d'un nombre premier, qui est : « *un nombre positif est premier, si et seulement s'il admet exactement deux diviseurs, 1 et lui même.* », et celle de nombre composé : « *un nombre qui admet plus de deux diviseurs est un nombre composé* ». On sait que n'importe quel entier admet une décomposition en nombre premier, ce qui se traduit par le fait que n'importe quel nombre entier positif peut s'écrire comme le produit fini de nombres premiers. Par exemple,  $26 = 2 \times 13$  ou encore  $149226 = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19$ . Les nombres premiers permettent de décrire l'ensemble des entiers naturels et ils ont été minutieusement étudiés depuis l'antiquité et encore de nos jours.

De nombreuses questions se posent concernant les nombres premiers. Existe-t-il un nombre fini de nombres premiers ? Peut-on tous les écrire ? Comment déterminer qu'un nombre est premier ou pas ? Quelle est la probabilité qu'un nombre pris au hasard soit premier ou pas ? Quels sont les caractéristiques des grands nombres premiers ? L'ensemble des nombres premiers dispose-t-il d'une structure particulière ? Ce sont quelques-unes des grandes questions que l'on peut se poser concernant les nombres premiers. Certaines ont trouvé des réponses, d'autres restent des problèmes ouverts et encore étudiés aujourd'hui. Nous allons essayer d'apporter des réponses à certaines des questions précédentes et d'expliquer pourquoi certaines interrogations restent non résolues à l'heure actuelle.

### Combien existe-t-il de nombres premiers ?

La nature particulière de certains nombres a été montrée, mais combien existe-t-il de tels nombres ? Euclide a prouvé qu'ils sont en nombre infini, quelque soit la grandeur d'un nombre choisi au hasard, on sait qu'il sera suivi par un nombre premier. La démonstration qui suit le principe du raisonnement par l'absurde est la suivante :

Considérons qu'il existe un nombre fini  $N$  de nombres premiers. Nous pouvons les énumérer par ordre croissant, on les note  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Construisons le nombre  $P = 1 + p_1 \times p_2 \times \dots \times p_N$ . Ce nombre  $P$  est par construction plus grand que n'importe lequel des  $p_i$ . Ayant répertorié tous les nombres premiers possibles, et comme  $P$  est plus grand que n'importe lequel d'entre eux,  $P$  est forcément un nombre composé, et les facteurs premiers dont il est facteur sont parmi les  $p_i$ . Supposons que le premier nombre premier  $p_1$  divise  $P$ ,  $P$  s'écrit alors  $P = p_1 \times P'$ . Si l'on considère le nombre  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_N$ , il est clairement divisible par  $p_1$ . Ainsi on peut écrire la succession suivante d'égalité :