

Table des matières

1	Bases de la géométrie projective	1
1.1	Introduction	1
1.2	Espaces projectifs	3
1.2.1	Construction vectorielle	3
1.2.2	Carte affine	4
1.2.3	Sous-espaces projectifs	6
1.2.4	Les coordonnées homogènes	7
	Système de coordonnées projectives	7
	Coordonnées homogènes, coordonnées affines	9
	Cas des équations polynomiales	10
1.2.5	Repère projectif	11
1.2.6	Dessins. Les diverses cartes	12
1.2.7	Conclusion de cette première approche	14
1.3	Applications projectives	15
1.3.1	Construction des applications projectives à partir des applications linéaires	15
1.3.2	Structure de groupe des homographies d'un espace projectif	17
1.3.3	Expression à l'aide d'un repère projectif	19
	Transformation d'un repère en un autre	19
	Expression analytique d'une homographie	20
	Les points invariants d'une homographie d'un espace projectif dans lui-même	22
1.3.4	Trace sur une carte affine d'une transformation projective	23
	Transformations homographiques et transformations affines	23

	Liens entre les expressions analytiques affines et projectives	24
	L'exemple des translations, transvections	26
2	Fonctionnement de la géométrie projective	27
2.1	Les théorèmes fondamentaux	27
2.1.1	Le théorème de Desargues	27
2.1.2	Le théorème de Pappus	29
2.1.3	Opérations algébriques sur une droite projective	30
	L'addition	30
	La multiplication	31
2.1.4	Transformation projective et colinéation	33
2.2	Géométrie projective sur la droite projective	36
2.2.1	Quotient des coordonnées projectives d'un point	36
2.2.2	Le birapport de quatre points alignés	38
2.2.3	Un exemple important : les perspectives	40
2.2.4	Construction des images d'une homographie	42
2.2.5	Les involutions de la droite projective	43
2.2.6	Exemple concernant la division harmonique	47
2.3	La dualité	48
2.3.1	Espace projectif dual	48
2.3.2	Exemples de situations duales	51
2.4	Exemples d'espaces et de transformations	52
2.4.1	Espaces d'hyperplans	52
2.4.2	Espaces de cercles	53
2.4.3	Espaces de coniques	54
2.4.4	Un peu d'optique	55
3	Les coniques en géométrie projective	57
3.1	Les coniques projectives	57
3.1.1	Avertissement sur les courbes algébriques	57
	Les trois extensions indispensables	57
	Transformations homographiques et similitudes	58
3.1.2	La dualité revisitée	59
	La mise en place des notions de base	59
	Equation tangentielle	61
	Pôles et polaires	64
	Droites conjuguées	65

	Suite du dictionnaire obtenu grâce à la transformation par polaires réciproques	66
	Remarque : conjugaison et homographies	66
3.2	La structure projective d'une conique	67
3.2.1	Définition de la structure	67
3.2.2	Birapport	70
3.2.3	Théorème de Pascal et de Brianchon	70
3.2.4	Constructions de points et de tangentes	73
	Construction d'un point d'une conique donnée par 5 points	73
	Construction d'une tangente à une conique donnée par 5 tangentes	73
	Construction d'une tangente en un point choisi parmi 5 points définissant une conique	73
	Construction du point de contact d'une tangente à une conique choisie parmi 5 tangentes définis- sant cette conique	74
3.2.5	Conique à structure projective plongée dans le plan . .	75
	Théorème de Frégier	75
	Axe d'homographie	77
	Application : recherche de l'image M' d'un point M par une homographie donnée par 3 couples de points homologues.	78
	Application : recherche des points fixes d'une homo- graphie sur la droite.	78
	Application : recherche des intersections d'une co- nique donnée par 5 points avec une droite. . .	78
	Application : le problème de Castillon.	78
	Généralisation du théorème de Frégier	79
4	Point de vue des groupes de transformations	85
4.1	Produit semi-direct de groupes	85
4.2	Groupes de la géométrie classique	86
4.2.1	Groupe linéaire, groupe projectif	86
4.2.2	Groupe affine	87
4.2.3	Groupes $SL(n, K)$, $SA(n, K)$ et $PSL(n, K)$	88
4.2.4	Groupes classiques et groupes projectifs	88

5 Compléments et applications	91
5.1 Autres corps de base, cas des corps finis	91
5.2 L'aspect axiomatique	94
5.3 Les applications à la perspective	97
5.3.1 Généralités sur les représentations à base de projection	97
5.3.2 Projection centrale, perspective	97
6 Exercices	107
6.1 Les énoncés	107
6.1.1 Bases de la géométrie projective	107
6.1.2 Le fonctionnement de la géométrie projective	108
6.1.3 Les coniques en géométrie projective	110
6.1.4 Point de vue des groupes de transformations	113
6.1.5 Compléments et applications	114
6.2 Les solutions	116
6.2.1 Bases de la géométrie projective	116
6.2.2 Le fonctionnement de la géométrie projective	120
6.2.3 Les coniques en géométrie projective	121
6.2.4 Point de vue des groupes de transformations	126
6.2.5 Compléments et applications	128
Bibliographie	131
Index	133