Chapitre I

Ondes

Une variation, de grandeur physique, qui se propage dans un espace (*milieu*), suite à une perturbation, constitue une onde. La grandeur physique qui varie est appelée *grandeur caractéristique* de cette onde (pression acoustique, variation de position ou vitesse de vibration de molécules…).

Une onde se propage avec une vitesse c, sans transporter de matière mais en transportant l'énergie E provenant de la perturbation qui l'a générée. Par exemple, lorsqu'on jette une pierre dans l'eau, le niveau de l'eau subit une perturbation locale dans le sens de l'axe vertical z. Cette perturbation et l'énergie correspondante se propagent horizontalement dans le plan xOy, sous forme d'une onde, mais l'eau reste au même endroit.

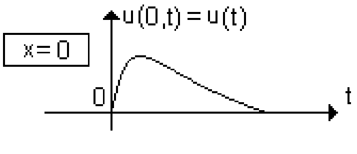
On rencontre des ondes dans certaines situations et dans de nombreux domaines (mécanique, acoustique, lumière, radio...).

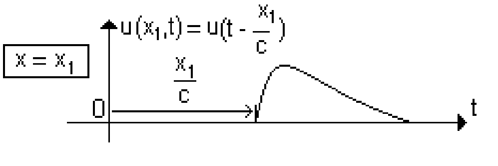
1. Généralités

Soit u(t) = u(0,t) une grandeur physique subissant, en un point O, une perturbation dépendant du temps. Si l'onde associée à cette perturbation se propage avec une vitesse c, la valeur u(x,t) de la grandeur u, en un point x et à l'instant t, est égale à la valeur qu'elle possédait au point O à l'instant t-x/c.

Si l'onde se propage sans subir d'affaiblissement provenant de forces de frottement, l'équation de l'onde en un point x et à l'instant t s'écrit :

- $u(x,t) = u(0, t - \frac{x}{c}) = u(t - \frac{x}{c})$ pour une propagation dans le sens des x positifs
- $u(x,t) = u(0, t + \frac{x}{c}) = u(t + \frac{x}{c})$ pour une propagation dans le sens des x négatifs





1.1. Types d'ondes

• Ondes mécaniques, ondes électromagnétiques

On distingue les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques.

Les ondes mécaniques correspondent à la propagation, dans un milieu matériel élastique, d'une perturbation de la matière produite à un endroit.

Les ondes électromagnétiques consistent en la propagation, dans un milieu matériel ou dans le vide, de la variation d'un champ électrique et magnétique à un endroit.

Les ondes électromagnétiques (lumière, ondes radio…) peuvent se propager dans le vide, contrairement aux ondes mécaniques (ondes sonores, vagues…) qui ne peuvent exister qu'en présence d'un milieu matériel solide, liquide ou gazeux.

La grandeur caractéristique d'une onde peut être de type scalaire, comme par exemple la pression acoustique p(x,y,z,t) en un point (x,y,z) et à un instant t, ou vectorielle, comme par exemple le champ électrique **E** ou le champ magnétique **B** en un point (x,y,z) et à un instant t.

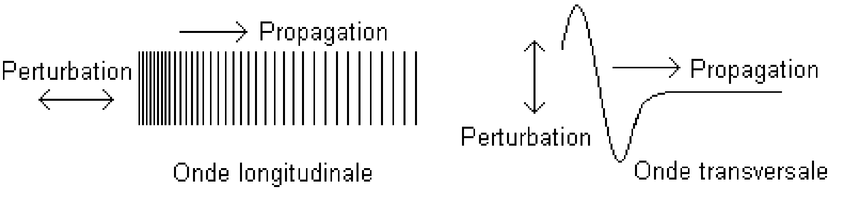
$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \left(E_x(x,y,z,t), E_y(x,y,z,t), E_z(x,y,z,t)\right)$$

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) = \left(B_x(x,y,z,t), B_y(x,y,z,t), B_z(x,y,z,t)\right)$$

• Ondes longitudinales, ondes transversales

On dit qu'une onde est :

- longitudinale si elle se propage dans la même direction que la perturbation qui la génère (ondes acoustiques, ondes obtenues en comprimant puis en relachant le premier ressort d'une série de ressorts…) ;
- transversale, si elle se propage dans une direction perpendiculaire à la perturbation qui la génère (onde obtenue en agitant verticalement le bout d'une corde, ondes éléctromagnétiques…).

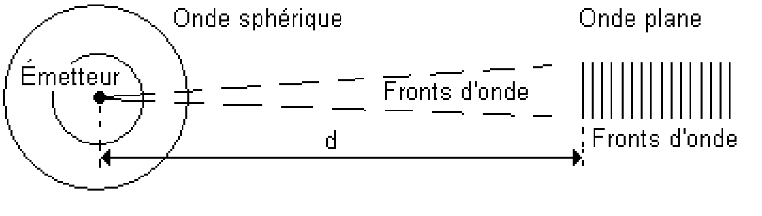


• Ondes planes, ondes sphériques

On appelle front d'onde l'ensemble des points d'une onde qui, depuis la source émettrice, présentent des temps de trajet égaux.

Lorsque le front d'onde est en forme de sphère on dit que l'onde est sphérique. Quand il constitue un plan on dit que l'onde est plane.

Lorsque la source est omnidirectionnelle et que le milieu de propagation est homogène et isotrope, c'est à dire qu'il possède les mêmes propriétés dans toutes les directions, les ondes sont sphériques car elles se propagent de façon équivalente dans tout l'espace.



On assimile une onde sphérique à une onde plane, dans une direction donnée, lorsque la distance d entre le front d'onde et la source est suffisament grande par rapport aux dimensions de la source. Dans ce cas, on assimile la source à une source ponctuelle.

• Ondes progressives, ondes stationnaires

Lorsqu'une variation de grandeur physique se propage dans l'espace, de proche en proche et de plus en plus loin, on dit que l'onde est progressive.

$$u(x,t) = u(t - \frac{x}{c})$$

Lorsqu'une variation de grandeur physique ne se propage pas dans l'espace mais reste localisée en un endroit déterminé, on dit que l'onde est stationnaire. Dans ce cas, la variation de la grandeur caractéristique de l'onde, en un point donné, dépend uniquement du temps. Dans ces conditions, les variables x et t ne sont plus couplées et la fonction d'onde u(x,t) peut s 'écrire sous forme d'un produit de deux fonctions indépendantes.

$$u(x,t) = f(x).g(t)$$

• Dimension de propagation

Une onde peut être

- unidimensionnelle ;
- bidimensionnelle ;
- tridimensionnelle.

Dans le premier cas, la variation, de la grandeur caractéristique dans l'espace, est décrite dans un repère à une dimension (O,x).

Dans le second cas, la variation est décrite dans un repère à deux dimensions : (O,x,y) en coordonnées cartésiennes et (O,r,θ) en cordonnées polaires.

Dans le troisième cas, la variation est décrite dans un repère à trois dimensions : (O,x,y,z) en coordonnées cartésiennes, (O,r,θ,z) en coordonnées cylindriques et (O,r,θ,φ) en coordonnées sphériques (cf. Annexe 1 § 1).

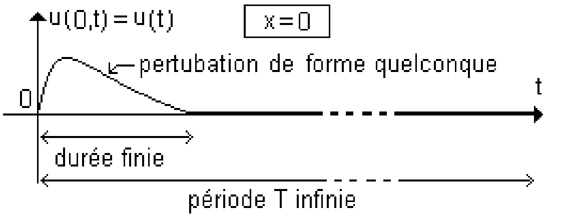
• Ondes périodiques

Lorsque la variation u, d'une grandeur physique en un endroit, se reproduit à l'identique toutes les T secondes, on dit que l'onde correspondante est périodique de période T.

T (s) période d'une onde ⇔ $u(t \pm nT) = u(t)$ avec $n = 0,1, 2 \ldots N$

Remarque : Une perturbation n'est jamais de durée infinie. Elle devient toujours égale à 0 au bout d'un certain temps. La condition $n \leq N < \infty$ est donc toujours vérifiée.

Une perturbation de durée finie, de forme quelconque et non périodique, peut être considérée comme une perturbation périodique de période infinie, à condition de lui attribuer la valeur 0 à l'issue de sa durée.
Elle peut alors être décomposée en une somme continue, d'ondes sinusoïdales monochromatiques, appelée transformée de Fourier (cf. Annexe 3 § 2).



• Analyse d'un type d'onde

Avant d'étudier plus en détail un type d'onde particulier, on peut se poser les questions suivantes. S'agit-il d'une onde :

1- mécanique (a) ou électromagnétique (b) ?
2- longitudinale (a) ou transversale (b) ?
3- plane (a) ou sphérique (b) ?
4- progressive (a) ou stationnaire (b) ?
5- périodique (a) ou non périodique (b) ?
6- unidimensionnelle (a) ou multidimensionnelle (b) ?
7- sinusoïdale (a) ou non sinusoïdale (b) ?
et (dans le cas 7a)
8- monochromatique (a) ou polychromatique (b) ? (cf. § 2)

Exemples :

	Onde sonore se propageant dans un tuyau							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	x	x	x		x	x	x	
b				x				x

	Son se propageant dans l'air							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	x	x		x	x		x	
b			x			x		x

On appelle :

- OPS une onde progressive sphérique.
- OPP, une onde progressive plane ;
- OPPH, une onde plane progressive harmonique et OPPM, une onde plane progressive monochromatique.

1.2. Paramètres d'une onde périodique

• Période

La période T d'une onde périodique représente la durée au bout de laquelle la perturbation périodique associée à cette onde reprend la même valeur.
(cf. § 1 - Ondes périodiques)

• Fréquence

La fréquence f d'une onde périodique représente le nombre de fois, par seconde, que la perturbation se reproduit à l'identique. La période et la fréquence sont des caractéristiques instrinsèque d'une onde périodique. Elles ne dépendent pas du milieu dans lequel celle-ci se propage.

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ (Hz ou s^{-1}) avec ω appelé *pulsation* de l'onde

• Longueur d'onde

On appelle longueur d'onde λ, d'une onde périodique se propageant avec une vitesse c, la distance sur laquelle cette onde se propage, pendant la durée T d'une période. La longueur d'onde ne constitue pas une caractéristique intrinsèque de l'onde périodique car elle dépend de la vitesse de propagation de cette onde qui dépend elle-même du milieu dans lequel elle se propage.
On montre que $\lambda = cT$ (m) (cf. Chapitre II § 3)

• Fréquence spatiale et nombre d'onde

Soit une perturbation conduisant à une OPP u(0,t) se propageant sans s'affaiblir dans la direction x, dans le sens + ou dans le sens -

Sens + : $u(x,t) = u(t - \frac{x}{c}) = u(x, t+T) = u(t+T-\frac{x}{c}) = u(t - \frac{x - cT}{c}) = u(x - \lambda, t)$

Sens - : $u(x,t) = u(t + \frac{x}{c}) = u(x, t+T) = u(t+T+\frac{x}{c}) = u(t + \frac{x + cT}{c}) = u(x + \lambda, t)$

donc $u(x \pm n\lambda, t) = u(x,t)$

La fréquence spatiale S de l'onde est égale au nombre de longueurs d'onde présentes par unité de longueur. Le nombre $k = 2\pi S$ est appelé nombre d'onde. Il représente le nombre d'oscillations de l'onde par unité de longueur.

$S = \frac{1}{\lambda}$ (m^{-1}) et $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}$ (rd/m)

1.3. Absorbtion, atténuation et dispersion

• Absorbtion

L'absorption d'une onde par la matière est la transformation d'une partie de l'énergie de cette onde en une autre forme d'énergie, en chaleur par exemple.

• Atténuation

L'atténuation d'une onde est l'affaiblissement de l'amplitude de cette onde, et donc de son énergie, en fonction de la distance parcourue. Elle est provoquée par une absorbtion partielle de l'énergie de l'onde par le milieu dans lequel celle-ci se propage.

Lorsque la grandeur caractéristique u(x,t) d'une onde subit une diminution exponentielle, en fonction de la distance parcourue par cette onde, on dit que l'affaiblissement suit la *loi de Lambert*.

$$u(x,t) = u_0(x,t)e^{-\alpha x}$$

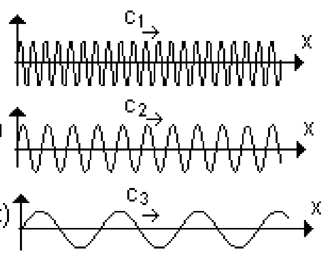
• Dispersion

On appelle *dispersion*, le phénomène qui se produit lorsque les vitesses de propagation c, d'ondes monochromatiques dotées de pulsations ω différentes, sont différentes les unes des autres (cf. § 2.1). Dans ce cas, le milieu de propagation est dit *dispersif*. L'air ne constitue pas un milieu dispersif pour le son.

$u_1(x,t) = u_{1m} \sin(\omega_1 t - k_1 x)$ $\quad k_1 = \dfrac{\omega_1}{c_1}$

$u_2(x,t) = u_{2m} \sin(\omega_2 t - k_2 x)$ $\quad k_2 = \dfrac{\omega_2}{c_2}$

$u_3(x,t) = u_{3m} \sin(\omega_3 t - k_3 x)$ $\quad k_3 = \dfrac{\omega_3}{c_3}$



1.4. Équation d'onde

• Équation d'onde, en l'absence de forces de frottement

Si une onde se propage sans subir d'affaiblissement découlant de forces de frottement, l'équation de l'onde, en un point x et à l'instant t, suit l'équation de d'Alembert indiquée ci-après.

a) Onde plane, progressive, unidimensionnelle

$u_M(x,t) = u(x,t) = u(0, t - \frac{x}{c})$ et, en posant $y = t - \frac{x}{c}$, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

D'où $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ Équation de d'Alembert

La solution générale de l'équation de d'Alembert, correspondant à la propagation de l'onde dans les deux sens, est

$$u(x,t) = u(t - \frac{x}{c}) + u(t + \frac{x}{c})$$

L'équation de d'Alembert est linéaire. Toute combinaison linéaire de solutions de cette équation est également solution.

Si u(x,t) et v(x,t) sont solutions de l'équation de d'Alembert, alors $\alpha u(x,t) + \beta v(x,t)$ est également solution $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) Onde plane, progressive, tridimensionnelle

Dans l'espace à trois dimensions, la grandeur caractéristique u, au point (x,y,z) et à l'instant t, s'écrit u(x,y,z,t).

L'onde correspondante est solution de l'équation de d'Alembert à trois dimensions qui s'écrit en coordonnées cartésiennes

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, avec Δu Laplacien de u (cf. Annexe 1 § 3).

En coordonnées cylindriques, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{avec } u = u(r,\theta,z,t)$$

et, en coordonnées sphériques

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{avec } u = u(r,\theta,\varphi,t)$$

c) Onde sphérique, progressive, tridimensionnelle

Si l'onde tridimensionnelle possède la symétrie sphérique, les termes en θ et φ s'annulent dans le Laplacien exprimé en coordonnées sphériques, on a

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et, dans ce cas, on remarque que

$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2}$$

En effet,

$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial ru}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(u + r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 2\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

d'où $\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} = r\,\Delta u$

D'autre part, $\frac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial ru}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(0 + r\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial u}{\partial t}\right) = r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = rc^2\Delta u$

d'où

$$rc^2\Delta u = \frac{\partial^2 (r\,u)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 (r\,u)}{\partial r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 (r\,u)}{\partial r^2} = r\,\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (r\,u)}{\partial t^2}$$

on en déduit, en posant ru(r,t)=f(r,t)

$$ru(r,t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + f\left(t + \frac{r}{c}\right) \text{et } u(r,t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}f\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

• Ondes mécaniques avec forces de frottement

On considère une onde mécanique, une onde sonore par exemple. La grandeur caractéristique u représente le déplacement d'un élément infinitésimal de matière de masse μ. En l'absence de forces de frottement, l'équation de d'Alembert appliquée à cet élément s'écrit

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (kg.m.s^{-2}) \quad (1)$$

On peut comparer cette expression avec le principe fondamental de la dynamique.

m **a** = $\sum$ **F**orces appliquées, avec **a** accélération d'un élément de matière.

Dans la formule (1), le terme de gauche correspond au produit de la masse μ par l'accélération d^2u/dt^2 subie par l'élément de matière.

Le terme de droite correspond à la force appliquée à cet élément, du fait de la perturbation mécanique associée à la grandeur caractéristique u.

En présence de frottement, il convient d'ajouter une force de frottement **F** aux forces appliquées à l'élément de masse μ.

$$F = -\frac{\mu}{\tau}\frac{du}{dt} \quad (kg.m.s^{-2})$$

La force de frottement F est proportionnelle à la vitesse de déplacement de l'élément de matière. Le signe moins indique que cette force est dirigée en sens inverse, par rapport à la vitesse de déplacement de cet élément. Le facteur τ est homogène à un temps afin d'assurer l'homogénéité de la formule.

En présence de forces de frottement, l'équation de d'Alembert modifiée s'écrit donc

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\mu}{\tau}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (kg.m.s^{-2}) \text{ d'où } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (m.s^{-2})$$

2. Ondes sinusoïdales

Une onde sinusoïdale est une onde dont la grandeur caractéristique u varie de façon sinusoïdale en fonction du temps.

$$u(0,t) = u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Une onde sinusoïdale monochromatique est constituée d'une fréquence unique. Une onde composée de plusieurs ondes sinusoïdales monochromatiques est une onde sinusoïdale polychromatique.

Les ondes sinusoïdales représentent un cas particulier des ondes quelconques. Le physicien Joseph Fourier (1768-1830) a montré que toute onde périodique, de forme quelconque, pouvait se décomposer en une somme discrète d'ondes monochromatiques (cf. Annexe 3 § 2)

$$u(0,t) = a_1 e^{j2\pi f_1 t} + a_2 e^{j2\pi f_2 t} + a_3 e^{j2\pi f_3 t} + \ldots = \sum_f a(f) e^{j2\pi f t}$$