Exercice 1

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Décomposez en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme : $P = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$.

La principale difficulté, dans cet exercice, tient dans l'éventuelle présence de racines réelles de P.
On utilise deux résultats :
si $\varphi \in \mathbb{R}$ alors $X^2 - 2X\cos(\varphi) + 1 = (X - e^{i\varphi})(X - e^{-i\varphi})$ et
$z^n = e^{in\varphi}$ a pour ensemble de solutions dans $\mathbb{C}$ $\left\{ e^{i(\varphi + \frac{2k\pi}{n})} \;\middle|\; 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}\cdot$

• Si $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$ alors $P = (X^n - 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}})^2$, décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.

Si n est pair, $n = 2p$ alors $P = (X-1)^2(X+1)^2 \prod_{k=1}^{p-1} (X - e^{i\frac{k\pi}{p}})^2 (X - e^{-i\frac{k\pi}{p}})^2$ en regroupant chaque racine dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et sa conjuguée, d'où la décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = (X-1)^2(X+1)^2 \prod_{k=1}^{p-1} \left[X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1\right]^2.$$

Si $n = 2p+1$ de même $P = (X-1)^2 \displaystyle\prod_{k=1}^{p} \left[X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right) + 1\right]^2$.

• Si $n\theta \equiv \pi\ [2\pi]$ alors $P = (X^n + 1)^2 = (X^n - e^{i\pi})^2 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k+1}{n}\pi})^2$.

Si $n = 2p+1$ de même $P = (X+1)^2 \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \left[X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k+1}{2p+1}\pi\right) + 1\right]^2$,

si $n = 2p$ alors $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \left[X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k+1}{2p}\pi\right) + 1\right]^2$.

• Enfin si $n\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ $P = (X^n - e^{in\theta})(X^n - e^{-in\theta})$ d'où, dans $\mathbb{C}[X]$,
$P = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}})(X - e^{-i\frac{\theta+2k\pi}{n}})$ et, dans $\mathbb{R}[X]$,
$P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left[X^2 - 2X\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + 1\right]$.

Exercice 2

On considère les polynômes $P = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2$ et
$Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.

1. Décomposez P et Q en facteurs premiers sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P et de Q en 1 et en 2).

2. Déterminez le ppcm et le pgcd des polynômes P et Q.

---

1. $P(1) = P(2) = Q(1) = Q(2) = 0$ et, en effectuant les divisions euclidiennes de P et Q par $(X-1)(X-2)$, on obtient $P = (X-1)(X-2)(3X^2+1)$ et $Q = (X-1)(X-2)(X^2+1)$ qui sont des décompositions en produits de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
De plus $P = (X-1)(X-2)(X\sqrt{3}-i)(X\sqrt{3}+i)$ et
$Q = (X-1)(X-2)(X-i)(X+i)$.

2. Immédiatement leur pgcd est $(X-1)(X-2)$ et leur ppcm est
$(X-1)(X-2)(3X^2+1)(X^2+1)$.

Exercice 3

On considère les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ suivants : $P = 2X^4 - 3X^2 + 1$ et $Q = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$.

1. Décomposez en facteurs premiers P dans $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P en 1 et en -1).

2. Décomposez en facteurs premiers Q dans $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer la valeur de Q en -2).

3. a) Déduisez des questions 1. et 2. qu'il existe deux polynômes U et V tels que $PU + QV = 1$.

b) Indiquez une méthode pour déterminer deux polynômes U et V en utilisant l'algorithme d'Euclide.

---

1. $P(1) = P(-1) = 0$ et, par division euclidienne de P par $(X-1)(X+1)$, on a $P = (X-1)(X+1)(2X^2-1) = (X-1)(X+1)(X\sqrt{2}-1)(X\sqrt{2}+1)$.

2. De même $Q(-2) = 0$ et, par division euclidienne, $Q = (X+2)(X^2+X+1)$ soit $Q = (X+2)(X-j)(X-\overline{\jmath})$.

3. a) P et Q n'ont pas de racine complexe commune, donc sont premiers entre eux. Le théorème de Bézout assure l'existence d'un couple (U, V).

b) On effectue une suite de divisions euclidiennes $P = QQ_1 + R_1,\ \deg(R_1) < 2$, $Q = R_1Q_2 + R_2$ où $\deg(R_2) < \deg(R_1) = 1$ (calcul) et enfin $R_1 = R_2Q_3 + r$ où $r \in \mathbb{R}^\star$ car P et Q sont premiers entre eux.
Alors $R_1 = P - QQ_1,\ R_2 = Q - (P - QQ_1)Q_2$ puis
$r = P - QQ_1 - \big[Q - (P - QQ_1)Q_2\big]Q_3$ et, en divisant par r, on obtient un couple solution (U, V).

Exercice 4

On considère la fraction rationnelle $R = \dfrac{X^5 + X^4}{(X-2)^2(X+1)^2}$·

1. Décomposez R en éléments simples.

2. Déterminez les primitives de la fonction $x \mapsto R(x)$ sur l'intervalle $]-1, 2[$.

---

1. $R = \dfrac{X^4}{(X-2)^2(X+1)} = X + 3 + \dfrac{a}{(X-2)^2} + \dfrac{b}{X-2} + \dfrac{c}{X+1}$ en effectuant la division euclidienne de X^4 par $(X-2)^2(X+1)$.
Un équivalent en 2 fournit $a = \dfrac{16}{3}$ et, en -1, $bc = \dfrac{1}{9}$·
En 0 on obtient $0 = 3 + \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{2} + c$ d'où $b = \dfrac{80}{9}$·

2. F est une primitive de $x \mapsto R(x)$ sur $]-1, 2[$ si et seulement s'il existe un réel K tel que $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 3x - \dfrac{16}{3(x-2)} + \dfrac{80}{9}\ln(2-x) + \dfrac{1}{9}\ln(x+1) + K$.

Exercice 5

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n et f l'endomorphisme de E défini par : $f(P) = P - P'$.

1. Démontrez que f est bijectif de deux manières :

a) sans utiliser de matrice de f,

b) en utilisant une matrice de f.

2. Soit $Q \in E$. Trouvez P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

---

1. a) $P \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow P = P'$ et donc il existe un scalaire λ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \lambda e^x$ d'où $P = 0$. f est donc un endomorphisme injectif de $\mathbb{K}_n[X]$ espace vectoriel de dimension finie, par suite c'est un automorphisme.

b) La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc inversible. Par suite f est un automorphisme.

2. $\forall Q \in \mathbb{K}_n[X]$, $f\left(\sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k)}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k)} - \sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k+1)} = Q - Q^{(n+1)} = Q$ car $Q^{(n+1)} = 0$ et donc, par injectivité de f, on a $P = \sum\limits_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

Remarque : s d est l'endomorphisme de E défini par $d(P) = P'$.
$f = I_E - d$. Comme $d^{n+1} = 0$, on a $f \circ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} d^k = \left(\sum_{k=0}^{n} d^k\right) \circ f = I$.

Donc f est inversible et $f^{-1} = \sum_{k=0}^{n} d^k$.
Cela permet d'en déduire immédiatement la solution de l'équation $f(P) = Q$.

Exercice 6

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminez $\mathrm{Ker}(f)$.

2. f est-il surjectif ?

3. Trouvez une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

---

1. $M \in \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ car $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Donc $\mathrm{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. f est un endomorphisme non injectif de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4 donc non surjectif. Plus précisément le théorème de rang montre que f est de rang 2.

3. On a déjà donné une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ en somme directe avec $\mathrm{Ker}(f)$, et donc supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$, leurs images par f forment une base de $\mathrm{Im}(f)$, et ce sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

1. Démontrez que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors AB et BA ont même trace.

2. Déduisez-en qu'en dimension finie toutes les matrices d'un même endomorphisme ont même trace.

3. Démontrez que si A et B sont semblables alors, pour tout $k \in N$, A^k et B^k ont même trace.

---

1. Posons $C = AB$ et $D = BA$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $c_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}$ d'où $\mathrm{tr}(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \right)$ et, en permutant les Σ, $\mathrm{tr}(AB) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} d_{k,k} = \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(BA)$.

2. Si U et V sont deux matrices de l'endomorphisme u de l'espace vectoriel E de dimension n, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $V = P^{-1}UP$ et alors, d'après la question 1., $\mathrm{tr}(V) = \mathrm{tr}\left((P^{-1}U)P\right) = \mathrm{tr}\left(P(P^{-1}U)\right) = \mathrm{tr}(U)$ en posant $A = P^{-1}U$ et $B = P$.

3. Si A et B sont semblables alors ce sont les matrices d'un même endomorphisme u et, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont des matrices de u^k, la question précédente montre que $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$.

Exercice 8

On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. Pour $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \sup\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.

1. Démontrez que $\|AB\| \leqslant n\|A\|\,\|B\|$, puis que, $\forall p \in \mathbb{N}^\star$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$.

2. Démontrez que, pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Est-elle convergente ?

---

1. Posons $C = AB$. $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $|c_{i,j}| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \times |b_{k,j}|$ par inégalité triangulaire, d'où $|c_{i,j}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \|A\| \times \|B\| = n\|A\| \times \|B\|$.
Par suite $\|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.
Montrons par récurrence que, si $p \in \mathbb{N}^\star$, alors $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$, l'inégalité est immédiate si $p = 1$.
Supposons la établie à un rang p, alors $\|A^{p+1}\| = \|A \times A^p\| \leqslant n\|A\| \times \|A^p\|$ d'où, par hypothèse de récurrence, $\|A^{p+1}\| \leqslant n\|A\|^{p+1}$, ce qui prouve l'hérédité et termine la preuve.

2. Si $p \in \mathbb{N}^\star$ la question précédente montre $\left\| \dfrac{A^p}{p!} \right\| \leqslant \dfrac{n^{p-1}\|A\|^p}{p!} \leqslant \dfrac{(n\|A\|)^p}{p!}$ terme général d'une série convergente de somme $e^{n\|A\|}$. Cela montre que $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente dans l'espace vectoriel normé $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui est complet car de dimension finie n^2. Par suite $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ converge.

Exercice 9

Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\Phi : P(X) \mapsto P(X) - P(X-1)$.
Donnez la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et déduisez-en $\mathrm{Im}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\Phi(X^p) = X^p - \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} X^k = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} X^k$ d'après la formule du binôme. Donc le coefficient i, j de la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est 0 si $i \geqslant j$ et $\binom{i}{j} (-1)^{i-j}$ sinon pour $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$.
La forme triangulaire de cette matrice avec une sous-diagonale à coefficients tous non nuls montre qu'elle est de rang n, que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}(X^0, \ldots, X^{n-1})$, soit $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Le théorème de rang montre alors que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est une droite vectorielle et, comme elle contient $\mathbb{R}_0[X]$ car $\Phi(X^0) = 0$, on en déduit $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]$.

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et f, g deux endomorphismes de E tels que : $f \circ g = Id$.

1. Démontrez que : $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

2. Démontrez que : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

3. Démontrez que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

---

1. $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ est immédiat.
Comme $f = f \circ (g \circ f)$ on a également l'inclusion réciproque et, donc, l'égalité.

2. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ est immédiat.
De même $g = (g \circ f) \circ g \Rightarrow \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$ puis $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.

3. $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$, par suite $g \circ f$ est un projecteur, d'où $E = \mathrm{Ker}(g \circ f) \oplus \mathrm{Im}(g \circ f)$ ou encore, d'après les questions précédentes, $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 11

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A.

1. Démontrez que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

2. Déterminez D_n en fonction de n.

3. Justifiez que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A?

---

1. On développe $Dn + 2$ selon sa première colonne :

$D_{n+2} = 2D_{n+1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n+1} - D_n$ en développant le dernier déterminant selon sa première ligne.

2. On a $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$ donc, en posant $D_0 = 1$, on a $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(D_n)_{n \geqslant 0}$ suit donc une récurrence linéaire d'ordre 2, l'équation caractéristique est $(r-1)^2 = 0$.
On en déduit l'existence d'un couple (α, β) de réels tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \alpha + \beta n$ et, en utilisant $n = 0$ et $n = 1$, il vient $\alpha = \beta = 1$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = n + 1$.

3. $A \in S_n(\mathbb{R})$, elle est donc diagonalisable. Enfin $\det(A) = D_n \neq 0$ donc 0 n'est pas valeur propre de A.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, (e_i) une base de E et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n vecteurs de E.

1. Démontrez qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que
$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = v_i$.

2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E, et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. Pour tout

u de $\mathcal{L}(E)$, on pose : $\varphi(u) = Mat_{(e_i)}u$ ($Mat_{(e_i)}u$ désignant la matrice de u dans la base (e_i)).

a) Démontrez que l'application φ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire et bijective.

b) Déterminez la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

C'est intégralement une question de cours.

1. Si f esiste alors, par linéarité, $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f\left(\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i\right) = \sum\limits_{i=1}^n x_iv_i$ et, donc, f est unique.

Soit $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ la base duale de $(e_1,\dots,e_n)$, en posant $f : x \mapsto \sum\limits_{i=1}^n \varphi_i(x)v_i$ on définit un endomorphisme de E car les φ_i sont linéaires et, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^n \varphi_i(e_j)v_i = \sum\limits_{i=1}^n \delta_{i,j}v_i = v_j$, donc f est solution.

2. a) Soit $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, $\forall j\in[\![1,n]\!], v_j = \sum\limits_{i=1}^n m_{i,j}e_i$ et $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$.

$M = \mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(f) \iff \forall j\in[\![1,n]\!],\ f(e_j) = v_j \iff f = \sum\limits_{i=1}^n \varphi_iv_i$ avec les notations de la question précédente.

Par suite $f \mapsto \mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(f)$ est une bijection linéaire de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont on vient de fournir la réciproque.

b) Par isomorphisme $\dim\big(\mathcal{L}(E)\big) = \dim\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\big) = n^2$ car la famille des matrices élémentaires est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de n^2 éléments.

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés $n\times n$ à coefficients réels. On admet que $\mathcal{L}(E)$ muni des lois $+$ et $\circ$ est un anneau, et que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ muni des lois $+$ et $\times$ est un anneau.

1. Précisez l'élément neutre pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{L}(E)$ et l'élément neutre pour la loi $\times$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. (e_i) désignant une base de E, on pose, $\forall u\in\mathcal{L}(E)$, $\varphi(u) = Mat_{(e_i)}u$ ($Mat_{(e_i)}u$ désignant la matrice de u dans la base (e_i)).

a) Démontrez que φ est un isomorphisme d'anneau de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Démontrez que, pour tout $u\in\mathcal{L}(E)$, $Mat_{(e_i)}(\underbrace{u\circ u\circ\cdots\circ u}_{n fois}) = \big(Mat_{(e_i)}u\big)^n$.

---

1. Les neutres sont respectivement $Id_E : \begin{pmatrix} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{pmatrix}$ et I_n.