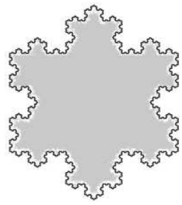
Problèmes

1. Mieux qu'un flocon de neige : la fractale suisse

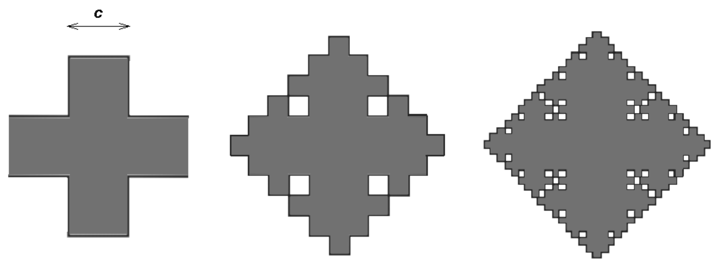
Niveau : facile *Thème : géométrie, dénombrement*



Vous connaissez sans doute le flocon de Koch, qui est une des fractales les plus célèbres. Ce flocon est construit à partir d'un triangle : on construit de nouveaux triangles plus petits sur chaque côté du triangle initial, puis de nouveaux triangles sur ces triangles, et ceci indéfiniment. On obtient une figure de surface finie, mais de périmètre infini.

Le professeur Trescarré, qui a supervisé ce livre, est allergique aux triangles. Il propose de construire une fractale analogue au flocon de Koch, mais à base de carrés, et à partir d'une « croix suisse » au lieu d'un triangle.

Sur chaque côté de la figure originale, on construit un carré plus petit, dont le côté est le tiers du côté de départ. On appelle c le côté de chaque branche de la croix suisse d'origine[1].



0 1 2

Essayez d'évaluer la surface et le périmètre de cette « fractale suisse ».

Pour vous aider, vous pouvez remplir le tableau ci-dessous.

Étape	Nombre de côtés de la figure	Côté des carrés élémentaires ajoutés	Nombre de carrés élémentaires ajoutés	Surface supplémentaire ajoutée	Périmètre total de la figure
0	12	c	4	$4c^2$	12 c
1	60	$\frac{c}{3}$	12	$\frac{12c^2}{9}$	20 c
n	…	…	…	…	…
Total :				…	…

Vérifiez que le périmètre grandit indéfiniment alors que la surface reste limitée.

Coup de pouce page 51. Solution page 65.

[1] En réalité, la croix suisse n'est pas constituée de 5 carrés égaux : les bras de la croix, dans le drapeau officiel, sont 1/6 plus longs que larges. Nous négligeons ce détail.

2. Cryptarithmes dans la peau

Niveau : facile *Thème : arithmétique*

1) Une mise en jambes facile : chaque lettre représente un chiffre différent, et tous les chiffres sont impairs (sauf le O de ZERO). Décryptez l'addition ci-contre :

```
  RIEN
+
  RIEN
 ______
  ZERO
```

2) Le professeur Trescarré, qui n'aime pas que l'on additionne RIEN avec RIEN, propose une égalité à base de carrés plus difficile (la résolution nécessite un programme que vous vous empresserez d'écrire) :

$$DIX^2 + UN^2 = CENTUN.$$

Coup de pouce page 51. Solution page 66.

3. Mélange étrange

Niveau : facile *Thème : proportions*

On a deux récipients B et N de volumes identiques. L'un, B, est rempli d'un liquide blanc, l'autre, N, d'un liquide noir. Ces deux liquides, de même densité, se mélangent très bien, pour donner une couleur plus ou moins grise selon les proportions utilisées pour chacun.

On prend q cm^3 de liquide blanc du récipient B et on le verse dans le récipient N.

Ensuite, on prend q cm^3 du mélange obtenu dans le récipient N et on le verse dans le récipient B.

1) On aimerait savoir lequel des deux liquides a été le plus « dénaturé » par l'opération : autrement dit, y a-t-il plus, moins ou autant de liquide noir dans B que de liquide blanc dans N ?

2) Même question si au lieu de prendre q cm^3 on prenait à chaque fois une proportion de p % du contenu de chaque récipient.

Coup de pouce page 51. Solution page 67.

4. Devinettes en or

Niveau : moyen *Thème : théorie des nombres*

1) Une mise en jambes facile : calculer très précisément $\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8} - \sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}$.

2) Essayez de calculer la valeur du nombre suivant, dont voici deux expressions :

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

les points de suspension indiquent que le processus (de prise de racine ou d'inversion) se poursuit indéfiniment.

Coup de pouce page 51. Solution page 69.

5. Nés sous la même bonne étoile

Niveau : moyen *Thème : probabilités*

On suppose dans tout le problème que les années ont 365 jours.

1) Quelle probabilité y a-t-il que deux personnes quelconques ne soient pas nées le même jour de l'année ? (les jumeaux ne sont évidemment pas des personnes quelconques, et l'on ignorera leur cas !)

Même question pour trois personnes (probabilité qu'aucune des trois ne soit née le même jour).

2) Quelle probabilité p_n y a-t-il que parmi n personnes aucune ne soit née le même jour de l'année ?

3) En déduire la probabilité q_n pour que parmi n personnes au moins deux soient nées le même jour de l'année.

4) Essayer d'évaluer le nombre minimum n pour avoir $q = 0{,}5$.

Coup de pouce page 51. Solution page 71.

6. Croisement des TGV

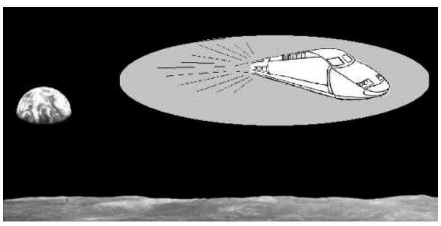
Niveau : facile (au moins pour la première question) *Thème : cinématique*

Le professeur Trescarré a imaginé ce problème au cours d'un déplacement en TGV (il prétend qu'il est impossible d'avoir ce genre d'idées seulement en marchant à pied, et on peut le comprendre). Le professeur a aussi choisi des données adéquates pour vous faciliter le calcul mental (pour le cas où vous lisiez ce livre pendant un voyage en TGV, vous aussi).

Voyageant à bord d'un TGV en pleine vitesse, vous avez dû croiser des TGV roulant en sens inverse, et vous avez sans doute remarqué que la durée de croisement était très rapide : pas plus de quelques secondes. Savez-vous que cela peut vous permettre d'évaluer la longueur du TGV ?

On suppose que deux TGVs de même longueur et roulant à la même vitesse de 360 km/h se croisent. Un voyageur assis à l'intérieur d'un des TGV mesure la durée du croisement avec une grande précision : il trouve exactement 2 secondes.

1) Trouver la longueur de chaque TGV.



2) Nous sommes en 2101 et la vénérable compagnie ferroviaire qui faisait rouler des TGV dans les siècles précédents a beaucoup évolué. A présent, les TGV sont des « FGV » (fusées à grande vitesse) qui permettent de voyager dans le système solaire. Les FGV roulent (ou plutôt se propulsent) à une vitesse égale à la moitié de la vitesse de la lumière. Pendant un de ces voyages hyper-véloces, voici que le commandant de bord annonce : « Mesdames et messieurs, nous venons de croiser la FGV en provenance de Jupiter. Le croisement de nos FGV a duré exactement une microseconde ! »

Dans un des « wagons », un passager dit alors à son voisin, après quelques instants de réflexion :

- C'est bizarre, un calcul simple m'indique que la FGV que nous avons croisée fait 300 mètres de long. Je croyais que toutes les FGV, descendantes des TGV, avaient une longueur standard de 400 mètres de long, comme les Eurostars au siècle dernier. Auraient-ils rétréci les fusées sans nous le dire ?

Son voisin, qui est par hasard un descendant du professeur Trescarré, sourit et lui répond.

- Vous avez trouvé que la longueur de la FGV semblait avoir diminué, mais votre calcul est erroné. D'ailleurs, cette longueur a diminué bien plus que vous ne le pensez. Avez-vous entendu parler de la théorie de la relativité ? C'est une théorie du XX^e siècle, qui n'est pas encore totalement fausse de nos jours. Laissez-moi vous l'expliquer.

Là-dessus, le descendant du professeur Trescarré sort son carnet (électronique, bien sûr) et commence à écrire des formules mathématiques.

c = vitesse de la lumière = 300 000 km/s.

Addition des vitesses : $V = \dfrac{V_1 + V_2}{\left(1 + \dfrac{V_1 V_2}{c^2}\right)}$

Longueur apparente : $L = L_0 \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}$

Quelle est la « vraie » longueur de la FGV ?

Coup de pouce page 51. Solution page 72.

7. Une racine bien carrée

Niveau : moyen *Thème : suites*

Il y a bien longtemps, au début du XX^e siècle, on apprenait en sixième l'extraction des racines carrées. On peut encore trouver la méthode dans de vieux livres de maths. C'était une opération un peu compliquée, assez calculatoire, à une époque où les calculatrices n'existaient pas. Cela s'appelait la « méthode de la potence » (peut-être parce qu'elle mettait les élèves à la torture ?).

Imaginez que vous n'ayez à votre disposition qu'une calculatrice « non scientifique » : elle ne permet que les 4 opérations élémentaires. Comment calculer une racine carrée, par exemple celle de 5000 ?

L'élève Chapron, terre à terre et pragmatique, se dit : je vais essayer successivement toutes les valeurs de carrés autour de 5000. Si un carré dépasse 5000, j'essaie avec un nombre un peu plus petit ; si au contraire le carré est en-dessous de 5000, j'essaie avec un nombre un peu plus grand. Je vais ainsi m'approcher de plus en plus de la bonne valeur.

Le professeur Trescarré se dit : je vais utiliser une vieille recette que je tiens de ma grand-mère ornithologue, la recette de Héron, qui est la suivante :

Recette de Héron pour calculer racine de *A* :

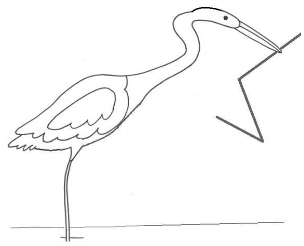
a) Prendre une valeur de départ (u_0) positive quelconque (telle que A ou $A/2$), la mettre dans une mémoire de travail ;

b) Diviser le nombre A par la valeur mise en mémoire ;

c) Ajouter à ce résultat la valeur toujours en mémoire ;

d) Prendre la moitié de ce résultat et la stocker en mémoire pour remplacer la valeur précédente ;

e) Recommencer à l'étape b), ou arrêter si vous jugez avoir atteint une précision suffisante.



On cherche à évaluer les deux méthodes.

1) Traduisez la « recette de Héron » en langage mathématique (on définira une suite u_n). Expliquer pourquoi la recette « marche ».

2) Comparer les deux méthodes. Laquelle semble la meilleure ?

Méthode « Chapron »	Méthode « Trescarré » (Héron)
La racine de 5000 doit être un peu plus grande que 70, puisque $70^2 = 4900$ est proche de 5000. Or 71 × 71 = 5041. Elle est donc entre 70 et 71. Essayons 70,5 : $70{,}5^2 = 4970{,}25$. Encore en-dessous ! Essayons 70,75 : $70{,}75^2 = 5005{,}5625$. Un peu trop grand, mais pas bien loin. Essayons 70,7 : ça donne 4998,49, un tout petit peu en-dessous. Essayons 70,71 : 4999,9041. On approche. Avec 70,713 : 5000,3283 ; avec 70,712 : 5000,2869 ; avec 70,711 : 5000,0455 ; avec 70,710 : 4999,9041. Le résultat est donc 70,710.	Partons avec $u_0 = 70$, puisque $70^2 = 4900$ est proche de 5000. Au 1er passage : $\left(70+\frac{5000}{70}\right)\div 2$ donne 70,714285. Au 2ème passage : $\left(70{,}714285+\frac{5000}{70{,}714285}\right)\div 2$ donne 70,710678. Peste ! se dit le professeur. Déjà 5 décimales de valides ! Je vais peut-être en rester là.

Coup de pouce page 52. Solution page 73.

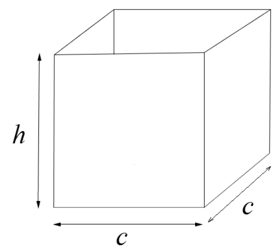
8. Optimisez votre cuve !

Niveau : moyen *Thème : fonctions et optimisation*

1) On commence par une question apparemment totalement inintéressante : étudier les variations de la fonction $f(x) = x^2 + \frac{4}{x}$.

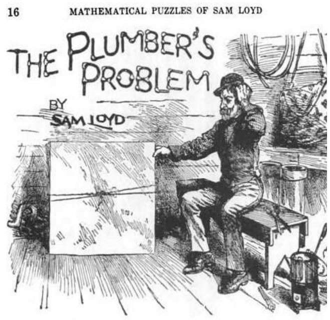
Trouver son minimum pour les valeurs $x > 0$.

2) On cherche à construire une cuve parallélépipédique, à base carrée, de capacité 1 m^3, avec des dimensions telles que la surface des parois (c'est-à-dire le fond plus les quatre faces latérales) soit minimale (car on veut consommer le moins de matériau possible pour réaliser cette construction).



Trouver les valeurs optimales de la hauteur h de la cuve et du côté c de la base.

3) La question 2 est en réalité issue d'un « casse-tête » de Sam Loyd[1], problémiste et joueur d'échecs américain, promoteur du « taquin ». Sam Loyd donne la solution sans préciser les calculs qui y mènent. Bizarrement, il décrit ce « casse-tête » comme un problème de « duplication du cube » (étant donné un cube, comment construire un cube de volume double, vieux problème de l'Antiquité). Voyez-vous un rapport avec le sujet ?



What is the most economical form of a tank designed to hold 1,000 cubic feet?

4) Que se passerait-il si l'on rajoutait un couvercle à la cuve ? Pensez-vous que le cube soit le seul volume dont la surface latérale soit minimale ?

5) Maintenant que vous êtes rodés, même question que la 2, mais avec une cuve cylindrique, de capacité 1 m^3, de hauteur h et de diamètre d. Trouver diamètre et hauteur optimaux pour avoir une surface minimale.

Coup de pouce page 52. Solution page 75.

9. C'est moi le Premier le plus Grand !

Niveau : moyen *Thème : fonctions usuelles*

Dans la course aux grands nombres premiers, le plus grand actuellement trouvé est un nombre dit « de Mersenne » (le 47^e nombre de Mersenne premier), découvert en 2008[2] : $M_{43112609} = 2^{43112609} - 1$.

De tels nombres sont rares et difficiles à trouver (une chance sur 30 millions[3], encore moins que de gagner au loto). Ont-ils une utilité quelconque ? Pas vraiment, mais sait-on jamais...

1) Sauriez-vous dire *combien de chiffres* contient ce nombre ?

2) Avez-vous une idée du *dernier* chiffre de ce nombre ?

3) Combien de chiffres contient le nombre 9^{9^9} ?

Coup de pouce page 52. Solution page 76.

10. Fonctions piégeuses

Niveau : facile *Thème : fonctions, continuité, dérivation*

Le professeur Trescarré a demandé à l'élève Chapron d'étudier la fonction f

[1] The plumber's Problem, *Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd*, Martin Gardner, DUNOD, 1970.
[2] Vous aussi vous pouvez participer à la course ! Voir www.mersenne.org.
[3] La probabilité qu'un nombre n soit premier est de l'ordre de 1/ln(n). La probabilité qu'un nombre de k chiffres soit premier est de l'ordre de 1/(k.ln(10)).

suivante : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} (x \neq 0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Le professeur voudrait notamment savoir si la fonction est continue et dérivable en zéro.

L'élève Chapron prétend que l'on s'arrange toujours pour prolonger les fonctions par continuité, et qu'une fonction non continue, « c'est très rare », d'ailleurs on n'en étudie pas au lycée, toutes les fonctions usuelles étant continues… Il ne fait aucun doute pour lui que la fonction *f* est continue, et notamment en zéro (sinon pourquoi aurait-on choisi précisément $f(0) = 0$?).

Le professeur Trescarré lève les yeux au ciel, mais l'élève Chapron poursuit sans se démonter. A présent, il calcule la dérivée et trouve : $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

Il en conclut que la fonction *f* n'est pas dérivable en zéro, puisque *f '(0)* n'est pas défini (le terme $\cos \frac{1}{0}$ n'ayant pas de sens).

1) Pensez-vous que l'élève aura une bonne note ?

2) Pris de pitié, le professeur propose à Chapron un sujet de rattrapage. Il lui pose la question suivante :

- Sauriez-vous intégrer la fonction $\tan^3 x$ entre − 2 et 2 ? Je peux même vous donner une primitive de cette fonction : $\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$, bien que cela ne serve pas, étant donnée la particularité de cette fonction.

L'élève a réfléchi un long moment, puis son visage s'est illuminé. Quelle a été sa réponse à votre avis ?

Coup de pouce page 52. Solution page 78.

11. Martingale éculée et tombola gagnante

Niveau : facile *Thème : probabilités*

Première partie

Certains joueurs, qui n'ont pas lu le fameux roman de Dostoïevski, recommandent une « martingale » pour gagner à tous les coups aux jeux de hasard du genre « pile ou face » (jeux où l'on a une chance sur deux de gagner et de doubler sa mise, par exemple en misant à la roulette sur Pair, sur Rouge ou sur Passe, ce que l'on appelle miser sur une « chance simple »).

La recette est simple : on joue jusqu'à ce que l'on gagne. Chaque fois que l'on perd, on rejoue en misant le double. Dès que l'on gagne, on rentre largement dans ses fonds, puisqu'on gagne le double de la mise précédente.

1) Calculer ce que l'on gagne exactement « si tout se passe bien ».

On pourra remplir le tableau suivant (l'étape *n* est l'étape gagnante, les précédentes sont perdantes) :

Étape	**Somme misée**	**Perte réelle à cette étape**	**Gain potentiel « brut » à cette étape**	**Gain réel « net » à cette étape**
1	*M*	*M*	*2M*	0
2	*2M*	*2M*	*4M*	0
3	…	…	…	0
n	…	0	…	…
total		…		…

2) Expliquer pourquoi cette méthode n'est pas recommandable.

3) Comment un casino pourrait-il décourager efficacement cette pratique ?

<u>Seconde partie</u>

Une association caritative a décidé de s'inspirer de la « martingale » ci-dessus pour organiser une tombola un peu particulière. « ***Tous*** *les billets sont gagnants* », annonce-t-elle, sûre d'attirer du monde, « *sauf un* ! ». Elle vend un millier de billets tous différents, à un prix unique (15 €). Un billet ressemble à ceci :

Tous les billets comportent les chiffres de 0 à 9 dans une des deux couleurs : blanc ou noir.

Une fois les billets vendus, l'association procède au tirage de la tombola. Par exemple, le tirage pourrait être le suivant :

0 noir	**1 blanc**	**2 noir**	**3 noir**	**4 noir**	**5 blanc**	**6 blanc**	**7 noir**	**8 blanc**	**9 noir**

La seule façon de perdre est de n'avoir aucune couleur exacte. Pour gagner la somme maximale, il faut avoir le 9 noir et tous les autres chiffres (de 0 à 8) dans la mauvaise couleur. Pour gagner le second lot, il faut avoir le 8 blanc et tous les chiffres précédents (de 0 à 7) avec la mauvaise couleur. En remontant ainsi vers le 0, on gagne une somme moindre dès que l'on a une bonne couleur, le 0 noir gagnant la somme minimale de 2 €. Le tableau des gains est donc le suivant :

Tirage gagnant	**0 noir**	**1 blanc**	**2 noir**	**3 noir**	**4 noir**	**5 blanc**	**6 blanc**	**7 noir**	**8 blanc**	**9 noir**
Gains :	2 €	4 €	8 €	16 €	32 €	64 €	128 €	256 €	512 €	1024 €

Chaque billet qui a une bonne couleur s'adjuge le montant indiqué correspondant à la **première** combinaison chiffre-couleur gagnante rencontrée, à l'exclusion de tout autre montant. Par exemple, un billet qui a un 0 noir gagne 2 € (on ne tient alors