CHAPITRE 1

Topologie sur les espaces métriques et les espaces vectoriels normés

La naissance de la topologie est directement liée à l'étude des ensembles de nombres réels. Un premier signe fut certainement la définition de la notion de point d'accumulation par Weierstrass vers 1860 (qui démontra que tout ensemble de nombres réels infini borné admet au moins un point d'accumulation, résultat admis auparavant).

Ce point de vue un peu étroit tomba ensuite en désuétude. Ce n'est qu'en 1906, à force d'étudier des ensembles de plus en plus abstraits, qu'apparut la notion de distance, introduite par Fréchet. La notion d'espace topologique général ne naquit qu'en 1914 grâce à Hausdorff qui définit la notion de voisinage.

Le développement des espaces vectoriels normés (en particulier de dimensions infinies) est d'abord dû à Hilbert ; Banach compléta largement cette théorie dans les années 1930.

La notion d'ensemble compact, en germe dès 1900, se développa avec Borel et Lebesgue grâce aux considérations liées à la théorie de la mesure.

La théorie générale des espaces topologiques n'étant pas au programme des classes de mathématiques spéciales, nous nous limiterons à l'étude des espaces métriques. Les curieux trouveront cependant leur compte dans les différentes remarques des parties de cours.

En annexe, sont présentés sous forme de problèmes et d'exercices :
– Le théorème de Baire et quelques applications (annexe A).
– Quelques résultats sur les espaces de Hilbert (annexe B).

Ces curiosités ne sont pas au programme de mathématiques spéciales, mais elles constituent de forts jolies théories qui nous sont accessibles.

1. Généralités

1.1. Normes et Distances

Normes.

Définition 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une *norme* sur E est une application $E \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto \|x\|$ telle que

(i) On a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(iii) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*).

Muni d'une norme, E est appelé un $\mathbb{K}$-espace vectoriel *normé* (en abrégé e.v.n).

Exemple 1. – $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

– Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a les normes classiques suivantes

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}, \quad \|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

Plus généralement, pour tout $\alpha \geq 1$, $\|x\|_\alpha = (\sum_i |x_i|^\alpha)^{1/\alpha}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (voir la conséquence de l'inégalité de Minkowsky, page 96).

– L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées d'un ensemble X dans un e.v.n E est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ (cette norme s'appelle *norme de la convergence uniforme*.)

Remarque 1. Lorsque seules les propriétés (ii) et (iii) de la définition sont vérifiées, on dit que $\| \cdot \|$ est une *semi-norme*.

Distances.

DÉFINITION 2. Soit E un ensemble. On appelle *distance* sur E toute application $\mathrm{d} : E \times E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

(i) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

(ii) Pour tout x, $y \in E$, $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ (*symétrie*).

(iii) Pour tout x, y, $z \in E$, $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$ (*inégalité triangulaire*).

Muni d'une distance, E est appelé *espace métrique*.

Exemple 2. – Si E est un e.v.n, $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E, qui fait de l'e.v.n E un espace métrique. Sauf mention contraire, c'est cette distance que l'on choisit toujours dans un e.v.n.

– Sur tout ensemble E, la distance d définie par

$$\mathrm{d}(x, y) = 0 \text{ si } x = y, \qquad \mathrm{d}(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y$$

est appelée *distance discrète* sur E. L'espace métrique (E, d) est alors appelé *espace discret*.

Diamètre d'une partie, distance entre deux parties.

DÉFINITION 3. Soit (E, d) un espace métrique. Si $A \subset E$, $A \neq \varnothing$, on appelle *diamètre* de A l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \mathrm{d}(x, y).$$

On dit que A est *bornée* si $A = \varnothing$ ou si $\delta(A) < +\infty$.

DÉFINITION 4. Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (E, d). On appelle distance de A à B le réel

$$\mathrm{d}(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \mathrm{d}(x, y).$$

Lorsque x est un élément de E, on appelle distance de x à A le réel

$$\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{d}(\{x\}, A) = \inf_{y \in A} \mathrm{d}(x, y).$$

Remarque 2. Attention ! Avec cette définition, l'application $\mathrm{d} : (\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\})^2 \quad (A, B) \to \mathrm{d}(A, B)$ n'est pas une distance sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ (on peut avoir $\mathrm{d}(A, B) = 0$ avec $A \neq B$).

Boules et sphères.

DÉFINITION 5. Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $x \in E$ et pour tout $\rho > 0$, on appelle

– *boule ouverte* de centre x de rayon ρ l'ensemble $\mathrm{B}(x, \rho) = \{y \in E \mid \mathrm{d}(x, y) < \rho\}$,
– *boule fermée* de centre x de rayon ρ l'ensemble $\mathrm{B_f}(x, \rho) = \{y \in E \mid \mathrm{d}(x, y) \leq \rho\}$,
– *sphère* de centre x de rayon ρ l'ensemble $\mathrm{S}(x, \rho) = \{y \in E \mid \mathrm{d}(x, y) = \rho\}$.

Lorsque E est un espace vectoriel normé (muni de la distance issue de la norme) et que $x = 0$, $\rho = 1$, on parle de boule *unité* ouverte, boule *unité* fermée et de sphère *unité*.

PROPOSITION 1. *Soit* (E, d) *un espace métrique,* A *une partie de* E*, et* $x \in E$*. L'ensemble* A *est borné si et seulement s'il existe* $r > 0$ *tel que* $A \subset \mathrm{B}(x, r)$.

1.2. Topologie d'un espace métrique

Sauf mention contraire, dans toute cette sous partie, (E, d) désigne un espace métrique.

Ouverts.

DÉFINITION 6. Une partie Ω de E est dite *ouverte* (ou Ω un *ouvert*) si $\Omega = \varnothing$ ou si

$$\forall x \in \Omega, \exists \rho > 0 \quad \text{tel que} \quad \mathrm{B}(x, \rho) \subset \Omega.$$

L'ensemble des parties ouvertes de E s'appelle *topologie* de E.

Exemple 3. Une boule ouverte est un ouvert. En particulier, dans $\mathbb{R}$ (muni de la distance usuelle $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$), les intervalles ouverts $]\alpha, \beta[$ sont des ouverts.

PROPOSITION 2. *(i) Les parties* $\varnothing$ *et* E *sont des ouverts.*

(ii) Une réunion d'ouverts est un ouvert.

(iii) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Remarque 3. Attention, une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\cap_{n \in \mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\}$ n'est pas ouvert.

Fermés.

DÉFINITION 7. Une partie F de E est dite *fermée* (ou F un *fermé*) si $E \setminus F$ est ouvert.

Exemple 4. Une boule fermée est un fermé. En particulier, un singleton $\{x\} = \mathrm{B_f}(x, 0)$ est un fermé. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles fermés $[\alpha, \beta]$ sont des fermés.

PROPOSITION 3. *(i) Les parties* $\varnothing$ *et* E *sont des fermés.*

(ii) Une intersection de fermés est un fermé.

(iii) Une réunion finie de fermés est un fermé.

Remarque 4. Attention, une réunion infinie de fermés peut ne pas être fermée. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} [1/n, 1 - 1/n] =]0, 1[$ n'est pas un fermé.

Voisinages.

DÉFINITION 8. On appelle *voisinage* d'un élément x de E toute partie V de E contenant un ouvert contenant x. L'ensemble des voisinages de x est noté $\mathcal{V}(x)$.

Exemple 5. Un ouvert contenant x est un voisinage de x, une boule fermée de centre x de rayon $\rho > 0$ est un voisinage de x.

Remarque 5. Une réunion (resp. une intersection finie) de voisinages de x est un voisinage de x.

Commentaire sur les espaces topologiques généraux.

Un *espace topologique* général E est défini comme étant un ensemble muni d'une partie de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont appelés des ouverts et vérifient les axiomes (i), (ii) et (iii) de la proposition 2. On définit alors les fermés comme à la définition 7 et les voisinages comme à la définition 8.

Toutes les notions de cette partie 1.2 peuvent être étendues aux espaces topologiques.

Il existe pour les espaces topologiques généraux une notion importante appelée la séparation. Un espace topologique E est dit *séparé* si pour tous éléments $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \varnothing$. On voit facilement que tout espace métrique est séparé.

Adhérence.

DÉFINITION 9. L'*adhérence* d'une partie A de E, notée $\overline{A}$, est le plus petit ensemble fermé contenant A.

Remarque 6. – L'ensemble $\overline{A}$ existe, c'est l'intersection des fermés contenant A.
– Une partie A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.

PROPOSITION 4. *Soit A une partie de E. Un élément x de E est dans $\overline{A}$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \quad \mathrm{d}(a, x) < \varepsilon$.
(ii) Pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \varnothing$.
(iii) $\mathrm{d}(x, A) = 0$.

Exemple 6. – Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de tout intervalle ouvert borné $]\alpha, \beta[$ est $[\alpha, \beta]$.
– Dans un e.v.n, on a $\overline{\mathrm{B}(0,1)} = \mathrm{B_f}(0, 1)$, propriété fausse dans un espace métrique général (voir l'exercice 1).
– Si A est fermé, on a

$$x \in A \iff x \in \overline{A} \iff \mathrm{d}(x, A) = 0.$$

DÉFINITION 10. Une partie A de E est dite *dense* dans E si $\overline{A} = E$.

Exemple 7. En utilisant la proposition précédente, on voit facilement qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la distance usuelle) si et seulement si

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b), \qquad]a, b[\, \cap A \neq \varnothing.$$

Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Intérieur.

DÉFINITION 11. L'*intérieur* d'une partie A de E, noté $\mathring{A}$, est le plus grand ouvert contenu dans A.

Remarque 7. – L'intérieur de A existe : c'est la réunion des ouverts contenus dans A.
– Une partie A de E est ouverte si et seulement si $\mathring{A} = A$.
– Pour toute partie A de E, $\mathring{A} = E \setminus \overline{(E \setminus A)}$ et $\overline{A} = E \setminus \overset{\circ}{\overbrace{(E \setminus A)}}$.

PROPOSITION 5. *Soit A une partie de E et x un élément de A. On a $x \in \mathring{A}$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée.*

(i) A est un voisinage de x.
(ii) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset A$.

Exemple 8. Dans $\mathbb{R}$, l'intérieur de $[\alpha, \beta]$ est $]\alpha, \beta[$; l'intérieur de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est $\varnothing$.

Frontière.

DÉFINITION 12. La *frontière* d'une partie A de E est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. On la note $\mathrm{Fr}(A)$ (ou encore ∂A).

Point d'accumulation, point isolé.

DÉFINITION 13. Soit A une partie de E.
- On dit que $a \in E$ est un *point d'accumulation* de A si pour tout voisinage V de a, $V \cap A \neq \varnothing$ et $V \cap A \neq \{a\}$, ce qui s'écrit encore
$$(\forall \varepsilon > 0), \qquad \mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ et } \neq \{a\}.$$
- On dit que $a \in A$ est un *point isolé* de A s'il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$, ce qui s'écrit encore
$$(\exists \varepsilon > 0), \qquad \mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}.$$

Remarque 8. Si a est un point d'accumulation de A, alors $a \in \overline{A}$ et de plus pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{B}(a, \varepsilon)$ contient une infinité de points de A.

Exemple 9. Dans $\mathbb{R}$, 0 est point d'accumulation de l'ensemble $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Topologie induite dans un espace métrique. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Une manière bien naturelle de faire de A un espace métrique est de le munir de la restriction de la distance d de E à $A \times A$. Ainsi, (A, d) est un espace métrique dont la topologie est appelée *topologie induite* par (E, d). La proposition suivante permet de caractériser les ouverts, fermés et voisinages de A par rapport à ceux de E.

PROPOSITION 6. *Soit A une partie de E.*
- *Les ouverts de A sont les ensembles de la forme $\Omega \cap A$, Ω étant un ouvert de E.*
- *Les fermés de A sont les ensembles de la forme $F \cap A$, où F est un fermé de E.*
- *Si $a \in A$, les voisinages de a dans A sont les ensembles de la forme $V \cap A$, V étant un voisinage de a dans E.*

Exemple 10. L'ensemble $[0, 1[$ est un ouvert de $A = [0, 2]$ (on peut écrire par exemple $[0, 1[\, = \,]-1, 1[\cap A)$.

1.3. Continuité

Applications continues.

DÉFINITION 14. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et $f : E \to E'$ une application. On dit que f est *continue* en $a \in E$ si pour tout voisinage W de $f(a)$, il existe un voisinage V de a tel que $f(V) \subset W$. Lorsque f est continue en tout point de E, on dit que f est *continue sur E*.

PROPOSITION 7. *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et soit $f : E \to E'$ une application. Alors f est continue en $a \in E$ si et seulement si*
$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E), \qquad (\mathrm{d}(a, x) < \alpha \Longrightarrow \mathrm{d}'(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

PROPOSITION 8. *Soient (E, d), (E', d'), (E'', d'') trois espaces métriques, et deux applications $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$. Si f est continue en $a \in E$ et g continue en $f(a)$, alors l'application $g \circ f : E \to E''$ est continue en a.*

PROPOSITION 9. *Soit $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ une application. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f est continue sur E.

(ii) L'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E.

(iii) L'image réciproque par f de tout fermé de E' est un fermé de E.

Remarque 9. Lorsque l'image de tout ouvert par f est un ouvert, on dit que f est une application *ouverte*. Une application continue n'est pas forcément ouverte (considérer par exemple une fonction constante sur $\mathbb{R}$). De même, l'image d'un fermé par une application continue n'est pas forcément fermée. Par exemple,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

est continue et $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$ n'est pas fermé.

Homéomorphismes.

DÉFINITION 15. Soit une application $F : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$. On dit que f est un *homéomorphisme* si f est bijective, continue, et si f^{-1} est continue.

Remarque 10. Une application peut être continue et bijective sans que l'application réciproque ne soit continue. Par exemple, l'application identité f de $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_{\mathrm{dis}})$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ ($\mathrm{d}_{\mathrm{dis}}$ désignant la distance discrète sur $\mathbb{R}$, d la distance usuelle) est continue mais f^{-1} n'est pas continue. (Cependant, on sait que si $f : (\mathbb{R}, \mathrm{d}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{d})$ est continue et bijective, alors f^{-1} est continue. Sous certaines hypothèses de compacité, il est également possible de conclure à la continuité de l'application réciproque — voir la proposition 14 page 31.)

DÉFINITION 16. Deux distances d et d$'$ sur E sont dites *topologiquement équivalentes* si elles définissent la même topologie (*i. e.* si les ouverts de (E, d) sont des ouverts de (E, d') et réciproquement).

PROPOSITION 10. *Deux distances* d *et* d$'$ *sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité de (E, d) sur (E, d') est un homéomorphisme.*

Remarque 11. Si d et d$'$ sont topologiquement équivalentes, les espaces métriques (E, d) et (E, d') possèdent les mêmes propriétés topologiques (en effet, les ouverts de ces deux espaces métriques coïncident, et il en est donc de même pour les fermés et les voisinages).

Normes et distances équivalentes.

DÉFINITION 17.
- Deux normes N_1 et N_2 sur un même e.v E sont dites *équivalentes* s'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $a\,N_1(x) \leq N_2(x) \leq b\,N_1(x)$.
- Deux distances d_1 et d_2 sur E sont dites *équivalentes* s'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $x, y \in E$, $a\,\mathrm{d}_1(x,y) \leq \mathrm{d}_2(x,y) \leq b\,\mathrm{d}_1(x,y)$.

Remarque 12.
- Deux normes équivalentes induisent deux distances équivalentes.
- Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes. Ainsi, les résultats de nature topologiques sont indépendant du choix de l'une ou l'autre des distances.
- On verra plus loin (voir le théorème 3 page 50) que sur un e.v de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Applications uniformément continues.

DÉFINITION 18. Une application $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ est dite *uniformément continue* sur E si

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in E), \qquad (\mathrm{d}(x,y) < \alpha \Longrightarrow \mathrm{d}'(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Remarque 13.
- Une fonction uniformément continue est continue ; la nuance entre ces deux notions est qu'une fonction *uniformément* continue vérifie $\mathrm{d}'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous les couples (x, y) tels que $\mathrm{d}(x,y) < \alpha$, α étant indépendant de x, alors que pour une fonction continue, α dépend de x. L'uniformité de cet $\alpha > 0$ pour une

fonction uniformément continue f en fait une fonction souple d'emploi. Du coup, certains théorèmes sont vrais pour les fonctions uniformément continues mais pas pour les fonctions continues. Nous verrons cependant que toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue (voir le théorème 2 page 31).

- Attention ! L'uniforme continuité n'est pas une notion topologique. Autrement dit, la seule définition de la topologie de E et E' ne suffit pas à définir l'uniforme continuité. En particulier, une fonction uniformément continue vis-à-vis d'une certaine distance ne l'est pas forcément vis-à-vis d'une distance *topologiquement* équivalente. Par contre, une fonction uniformément continue de (E, d_1) dans (E', d'_1), lorsqu'elle est regardée comme une fonction de (E, d_2) dans (E', d'_2), reste uniformément continue lorsque les distances $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ et $\mathrm{d}'_1, \mathrm{d}'_2$ sont équivalentes, ou lorsqu'elles sont uniformément équivalentes (voir la définition qui suit).

Exemple 11.
- Une fonction $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ *lipschitzienne*, c'est-à-dire vérifiant
$$(\exists k > 0, \forall x, y \in E), \qquad \mathrm{d}'(f(x), f(y)) \leq k\,\mathrm{d}(x, y),$$
est uniformément continue.
- La fonction $f : \ ]0, 1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 1/x$ est continue mais n'est pas uniformément continue.

La fin de la remarque précédente motive la définition suivante.

DÉFINITION 19. Deux distances d et d′ sur E sont dites *uniformément équivalentes* si l'application identité est uniformément continue de (E, d) dans (E, d') et de (E, d') dans (E, d).

Remarque 14. Deux distances équivalentes sont uniformément équivalentes. Deux distances uniformément équivalentes sont topologiquement équivalentes.

1.4. Produit d'espaces métriques

On se donne un nombre fini n d'espaces métriques $(E_1, \mathrm{d}_1), \ldots, (E_n, \mathrm{d}_n)$ et on pose $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. On veut faire de E un espace métrique. Un moyen naturel est de construire une distance d sur E à partir des distances d_i. Par exemple si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$, $\mathrm{d}(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \mathrm{d}_i(x_i, y_i)$ définit une distance sur E. Cette distance est appelée *distance produit* sur E. Sauf mention contraire, c'est cette distance que nous utiliserons sur un produit d'espaces métriques.

Remarque 15.
- En posant
$$\mathrm{d}'(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}''(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i(x_i, y_i)^2},$$
on a également affaire à des distances sur E. Ces distances sont équivalentes à la distance produit d, car
$$\forall x, y \in E, \qquad \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}''(x, y) \leq \mathrm{d}'(x, y) \leq n\,\mathrm{d}(x, y).$$
Il est donc indifférent de travailler avec l'une ou l'autre de ces distances. C'est parce que la distance produit est plus souple d'utilisation que nous l'avons choisie.
- Au sens de la distance produit d, la boule ouverte de centre $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de rayon $r > 0$ vérifie
$$\mathrm{B}(a, r) = \mathrm{B}(a_1, r) \times \cdots \times \mathrm{B}(a_n, r).$$

PROPOSITION 11. *Si $O_1, \ldots, O_n$ sont des ouverts de $E_1, \ldots, E_n$, le produit $O_1 \times \cdots \times O_n$ est un ouvert de E appelé* ouvert élémentaire.

Un ouvert de E n'est en général pas un ouvert élémentaire.

PROPOSITION 12. *La projection d'indice i, définie par*

$$\mathrm{Pr}_i\ : E = E_1 \times \cdots \times E_n \to E_i \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

est une application continue et ouverte (une application est dite ouverte si l'image de tout ouvert par cette application est un ouvert).

PROPOSITION 13. *Une application*

$$f:\ (F, \delta) \to E_1 \times \cdots \times E_n \quad x \mapsto f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)).$$

est continue en $a \in F$ si et seulement si pour tout i, $f_i = \mathrm{Pr}_i \circ f$ est continue en a.

PROPOSITION 14. *Soit une application $f:\ E = E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Pour tout i, on note*

$$f_i:\ E_i \to F \quad x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

(f_i est appelée application partielle *d'indice i au point a). Si f est continue en a, alors pour tout i, l'application partielle f_i est continue en a_i.*

Remarque 16. Attention ! La réciproque de ce dernier résultat est fausse. En d'autres termes, il se peut que tous les f_i soient continues en a_i sans que f soit continue en a. Par exemple, considérons l'application $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \neq (0,0),\ f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Les applications partielles en $(0,0)$ sont nulles, donc continues, et pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$ (sinon, l'application $\varphi:\ x \mapsto f(x,x)$ serait continue — composée d'applications continues — ce qui est faux puisque $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = 1/2$ dès que $x \neq 0$).

Continuité de la distance.

PROPOSITION 15. *Soit (E, d) un espace métrique. Alors l'application distance* $\mathrm{d}\ : E \times E \to \mathbb{R}$ *est lipschitzienne de rapport 2, en particulier continue.*

Conséquence . Soit $a \in E$ et $r > 0$. L'application $\varphi:\ E \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \mathrm{d}(a,x)$ est continue d'après les deux dernières propositions. On en déduit que $\mathrm{B_f}(a,r) = \varphi^{-1}([0,r])$ et $\mathrm{S}(a,r) = \varphi^{-1}(\{r\})$ (sphère de centre a de rayon r), images réciproques de fermés par une application continue, sont des fermés de E. On retrouve de même qu'une boule ouverte est un ouvert.

Continuité des opérations dans un e.v.n.

PROPOSITION 16. *Soit E un e.v.n sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les applications*

$$E \times E \to E \quad (x,y) \mapsto x + y \quad \text{et} \quad \mathbb{K} \times E \to E \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

sont continues.

Algèbre normée.

DÉFINITION 20. On dit qu'une norme $\|\cdot\|$ sur une $\mathbb{K}$-algèbre A (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une *norme d'algèbre* si $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pour tout $(x,y) \in A^2$. Munie d'une telle norme, A est appelée *algèbre normée*. L'application $A \times A \to A \quad (x,y) \mapsto xy$ est alors continue.

PROPOSITION 17. *Soit A un $\mathbb{K}$-e.v.n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f, g:\ (E, \mathrm{d}) \to A$ deux applications continues en $a \in E$. Alors les applications $f + g$, λf (pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé) sont continues en a. Si A est une algèbre normée, l'application fg est continue en a.*